

Feuille d'exercices 12

Exercice 1

Montrer que les éléments suivants sont irréductibles dans \mathcal{O}_d :

1. $3, 5 + 2\sqrt{-14}, 5 - 2\sqrt{-14}$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.
2. $2, \frac{1+\sqrt{-15}}{2}$ dans $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-15}}{2}]$.

Exercice 2

Soit I un idéal non nul dans $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}[\omega]$, les entiers du corps quadratique imaginaire, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

1. Montrez que I admet une \mathbb{Z} -base de la forme $(n, a + b\omega)$ avec $a, b, n \in \mathbb{Z}$.
2. Montrez que $N(I) = p$ premier ssi $I = \langle p, a + \omega \rangle$ avec $0 \leq a < p$ et $p \mid N(a + \omega)$.

Exercice 3

1. Écrire l'idéal $\langle 165 \rangle$ comme produit d'idéaux premiers dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
2. Écrire l'idéal $\langle 4 \rangle$ comme produit d'idéaux premiers dans $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-15}}{2}]$.

Exercice 4

Explicitez tous les idéaux de norme ≤ 9 dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Exercice 5

1. Décrire le comportement de $p = 19$ dans \mathcal{O}_{-71} .
2. Est-ce que l'idéal $\langle 11 \rangle$ est premier dans \mathcal{O}_{-47} ?

Exercice 6

On considère la relation d'équivalence suivante sur l'ensemble d'idéaux de \mathcal{O}_d :

$$I \sim J \iff \exists \alpha, \beta \in \mathcal{O}_d : \alpha I = \beta J.$$

1. Montrez que $I \sim \mathcal{O}_d$ ssi I est principal.
2. Montrez que $\langle 3 + 2\sqrt{-5} \rangle \sim \mathcal{O}_{-5}$
3. Montrez que $\langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle \sim \langle 3, 1 - \sqrt{-5} \rangle$.

Exercice 7

Utilisez la borne de Minkowski pour les idéaux dans $\mathcal{O}_d : \frac{4}{\pi}\sqrt{|d|}$ si $d \equiv 2, 3 [4]$ (resp. $\frac{2}{\pi}\sqrt{|d|}$ si $d \equiv 1 [4]$) afin de décrire :

1. $Cl(\mathcal{O}_{-6})$, le groupe des classes d'idéaux de \mathcal{O}_{-6} .
2. $Cl(\mathcal{O}_{-19})$, le groupe des classes d'idéaux de \mathcal{O}_{-19} .