UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre générale de base

TD

Feuille d'exercices 11

Exercice 1

On considère les corps de nombres quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ sans facteur carré. Montrez que $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d'})$ ssi $d = d'$.

Exercice 2

Soient $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un corps de nombres quadratique, $\mathcal{O}_d$ l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Montrez que $\alpha \in \mathcal{O}_d$ ssi $Tr(\alpha)$ et $N(\alpha)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Terminez la preuve du théorème suivant (cours 14, §4.2) :
Si $d \equiv 2, 3$ [4] alors $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
Si $d \equiv 1$ [4] alors $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}[\omega_d]$, $\quad \omega_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$

Exercice 4

Soit $d < 0$ sans facteur carré. Calculez le volume du parallélogramme fondamental du réseau des entiers $\mathcal{O}_d \subset \mathbb{C}$.

Exercice 5

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un corps de nombres quadratique et $\mathcal{O}_d$ l'anneau des entiers de K. Soit (α, β) une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_d$. On définit le discriminant

$$\Delta(\alpha, \beta) = \left(\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\alpha} & \overline{\beta} \end{pmatrix}\right)^2.$$

1. Montrez que le discriminant ne dépend pas de la base (α, β) choisie. On note et appelle alors

$$disc(K) := \Delta(\alpha, \beta),$$

le *discriminant* du corps K.

2. Calculez le discriminant de tous les corps quadratiques, en fonction de d (supposé sans facteur carré).

Exercice 6

Montrez que les anneaux $\mathcal{O}_{-7}$ et $\mathcal{O}_{-11}$ sont euclidiens.

Exercice 7

1. Montrez que les éléments $2, 3$ et $1+\sqrt{-5}$ sont irréductibles dans $\mathcal{O}_{-5}$. Déduisez que $\mathcal{O}_{-5}$ n'est pas factoriel.

2. Montrez que $\mathcal{O}_{-6}$ n'est pas factoriel. Est-ce que $\mathcal{O}_{-7}$ est factoriel ?

Exercice 8

On donne, à l'aide de $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, une deuxième preuve de la proposition suivante (cours 12, §4) : un nombre premier $p \geqslant 3$ s'écrit comme $p = x^2 + 2y^2, (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ssi $p \equiv 1, 3$ *mod* 8.

1. Soit $p \geqslant 3$ premier tel que $p = x^2 + 2y^2$. Montrez que $p \equiv 1, 3$ *mod* 8.

2. Soit $p \geqslant 3$ premier tel que $p \equiv 1, 3$ *mod* 8. Montrez que $p = x^2 + 2y^2$.
(On pourra montrer que -2 est un carré *mod* p et que p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Voir cours 14, §6.3)