UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre générale de base

TD

Feuille d'exercices 10

Exercice 1

Soit $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ x + y \equiv 0 \ [3]\}$.

1. Donnez une base de Λ. Trouvez $\det(\Lambda)$ et l'indice $[\mathbb{Z}^2 : \Lambda]$.

2. Donnez un vecteur non nul de Λ de longueur minimale.

Exercice 2

Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ le réseau engendré par

$$v_1 = (1, 2, 0), \ v_2 = (1, -5, 2), \ v_3 = (0, 3, 1).$$

Trouvez $\det(\Lambda)$, ainsi que l'indice de Λ dans $\mathbb{Z}^3$.

Exercice 3

On démontre le théorème de Minkowski pour un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.

1. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné, convexe, et symétrique par rapport à 0. Supposons que

$$Vol(S) > 2^n.$$

Montrez que S contient un point non nul de Λ.

2. Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ engendré par $(v_1, .., v_n)$ et $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné, convexe, symétrique par rapport à 0, et tel que

$$Vol(S) > 2^n \det(\Lambda).$$

Montrez que S contient un point non nul de Λ.

Exercice 4

Montrez que $p = x^2 + 3y^2$ (p premier, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$) si et seulement si $p = 3$ ou $p \equiv 1$ modulo 3.

Exercice 5

Réduire les formes quadratiques suivantes.

$$q_1 = [5, 6, 3],\ q_2 = [2, -2, 3],\ q_3 = [10, 30, 23].$$

Exercice 6

1. Déterminez toutes les formes quadratiques définies positives à coefficients entiers, et réduite, de discriminant -7.
2. Même question pour le discriminant -15.
3. Trouvez les formes réduites équivalentes à $q_1 = [14, 21, 8]$ et $q_2 = [5, 5, 2]$.

Exercice 7

On considère la forme quadratique $q = [5, 5, 2]$.

1. Pour $n \in \{7, 19\}$, déterminez si le discriminant Δ de q est un carré modulo $4n$. Lorsque c'est le cas, déterminez ses racines carrées.
2. Pour chacune des valeurs de n, déterminez un ensemble fini de formes quadratiques q_i de discriminant Δ telles que $q_i(1, 0) = n$, et telle que toute forme de discriminant Δ représentant proprement n soit équivalente à l'une des q_i.
3. Les entiers 7 et 19 sont-ils proprement représentés par q ?

Exercices supplémentaires

Exercice 8

Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un sous-groupe. Montrez que Λ est un réseau si et seulement si Λ est discret et $\mathbb{R}^n/\Lambda$ est compact.

Exercice 9

Démontrez théorème 1 du cours 13 : toute forme q définie positive est équivalente à une unique forme réduite, q'.