UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre générale de base

TD

Feuille d'exercices 1

Exercice 1

Soit G un groupe et $g \in G$. On appelle *ordre de g dans G* le plus petit des entiers $n \geq 1$ tels que $g^n = 1$, s'il en existe un, et $+\infty$ sinon.

1. Quel est l'ordre de -1 dans $(\mathbb{Q}, +)$? Et dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$?

2. L'élément $g \in G$ étant fixé, montrez que l'application $\mathbb{Z} \to G$, $m \mapsto g^m$ est un morphisme de groupes. Donnez les liens entre son noyau, son image et l'ordre de g.

3. Soient $k, n \geq 1$ deux entiers. Calculez l'ordre de la classe $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on pourra commencer par le cas où k et n sont premiers entre eux).

4. Quels sont les éléments d'ordre fini dans le groupe multiplicatif $S^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$?

Exercice 2

Soit G un groupe et $N \lhd G$ un sous-groupe normal.

1. On définit $g \sim h$ si $g^{-1}h \in N$ pour $g, h \in G$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G. On écrit gN pour la classe d'équivalence de g et G/N pour l'ensemble des classes d'équivalence. Si G est fini, on a $|G/N| \cdot |N| = |G|$.

2. Montrer que la loi de composition $gN \cdot hN := ghN$ donne une structure de groupe sur G/N et l'application $\pi : G \to G/N, g \mapsto gN$ devient ainsi un morphisme de groupes.

3. Montrer la propriété universelle de G/N : pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$ tel que $N \subset \ker(f)$, il existe un unique morphisme $\overline{f} : G/N \to H$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$. On a $\mathrm{im}(\overline{f}) = \mathrm{im}(f)$.

4. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que l'image $\mathrm{im}(f) \subset H$ est un sous-groupe et qu'on a un isomorphisme de groupes

$$G/\ker(f) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{im}(f).$$

5. Soit k un corps. Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes $\mathrm{GL}_n(k)/\mathrm{SL}_n(k) \xrightarrow{\simeq} k^\times$.

6. Montrer que la fonction $\exp(2\pi i z)$ induit un isomorphisme de groupes $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} S^1$.

Exercice 3

Soient A un anneau commutatif (avec les éléments neutres $0 \neq 1$).

1. Montrer que A est un corps ssi A contient exactement deux idéaux : $< 0 >$ et A.
2. Montrer qu'un anneau intègre possédant un nombre fini d'idéaux est un corps.
3. Donner un exemple d'un anneau A contenant un nombre fini idéaux qui n'est pas un corps.

Exercice 4

On considère les anneaux $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Exercice 5

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme surjectif d'anneaux commutatifs. On note $I = Ker(f)$ son noyau (donc f induit un isomorphisme $A/I \simeq B$).

1. Montrer que : (i) l'image de tout idéal de A est un idéal de B ; (ii) l'image réciproque de tout idéal de B est un idéal de A.

2. Montrer que les applications $J \mapsto f(J)$ et $K \mapsto f^{-1}(K)$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des idéaux J de A contenant I et l'ensemble des idéaux K de B.

3. Montrer qu'un idéal M de A est maximal ($M \neq A$; $M \subsetneq J \Rightarrow J = A$) ssi A/M est un corps.

Exercice 6

Soient A un anneau commutatif et $\phi : \mathbb{Z} \to A$ le morphisme canonique ($\phi(n) = n \cdot 1_A$). On appelle caractéristique de A l'entier $n \geqslant 0$ tel que $Ker(\phi) = n\mathbb{Z}$. On supposera A de caractéristique p, pour p un nombre premier.

1. Montrez que $px = 0$ pour tout $x \in A$.
2. Montrez que les coefficients binomiaux $\binom{p}{i}$ sont divisibles par p pour $0 < i < p$.
3. Montrez que l'application $F : A \longrightarrow A, x \longmapsto x^p$ est un endomorphisme d'anneaux.
4. Montrez que F est injectif (resp. bijectif) si A est un corps (resp. un corps fini).

Exercice 7

Soit $A = \mathbb{Z}[i]/ < 4 - i >$ (l'anneau des entiers de Gauss quotienté par l'idéal $< 4 - i >$). À l'aide du morphisme canonique $\phi : \mathbb{Z} \to A$, montrer que $\mathbb{Z}[i]/ < 4 - i > \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier $n > 0$ que l'on déterminera.