



Contrôle Continu 2 : conseils et exercices d'entraînement

1. Le CC 2 aura lieu vendredi apres-midi le 18 décembre.
2. Il portera sur tous les cours ainsi que les feuilles d'exercices.
3. Une bonne préparation serait de faire les feuilles d'exercices et les exercices supplémentaires ci-dessous.

Exercice 1

Les trois parties sont indépendantes.

1. Montrez qu'un anneau commutatif qui est intègre et fini est un corps.
2. Trouvez tous les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] / \langle 10 \rangle$.
3. L'anneau $\mathbb{Z}[X] / \langle 83, X^2 + X + 1 \rangle$ est-il un corps ?

Exercice 2

Déterminez le corps de décomposition L de $X^4 - 3$ sur \mathbb{Q} , ainsi que son degré $[L : \mathbb{Q}]$.

Exercice 3

On considère les anneaux $A_1 = \mathbb{F}_3[X] / \langle X^3 - X - 1 \rangle$ et $A_2 = \mathbb{F}_3[X] / \langle X^3 + X^2 - 1 \rangle$.

1. A_1 et A_2 sont-ils des corps ?
2. A_1 et A_2 sont-ils isomorphes ?

Exercice 4

1. Trouvez un générateur de \mathbb{F}_{32}^\times .
2. Énumérez les sous corps de \mathbb{F}_{64} ainsi que ceux de \mathbb{F}_{128}

Exercice 5

Soit $B \in M_3(\mathbb{Z})$ la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Mettez B sous forme normale de Smith, B' .
2. A quel groupe est isomorphe le groupe $G = \mathbb{Z}^3/B(\mathbb{Z}^3)$?

Exercice 6

1. Déterminez toutes les formes quadratiques définies positives à coefficients entiers, et réduite, de discriminant -23 .
2. La forme $q = [13, 9, 2]$ est équivalente à quelle forme réduite ?
3. Est-ce que 29 est proprement représenté par une forme de discriminant -23 ? Si oui, trouvez la forme réduite qui représente 29.

Exercice 7

1. Montrez que 2, 3 et $1 + \sqrt{-17}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$. En déduire que $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ n'est pas factoriel.
2. Écrire l'idéal $\langle 18 \rangle$ comme produit d'idéaux premiers dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$
3. Explicitez tous les idéaux de norme 30 dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$.

Exercice 8

1. Décrire le comportement de $p = 19$ dans \mathcal{O}_{-47} .
2. Est-ce que l'idéal $\langle 37 \rangle$ est premier dans \mathcal{O}_{-47} ?

Exercice 9

Décrivez $Cl(\mathcal{O}_{-14})$, le groupe des classes d'idéaux de \mathcal{O}_{-14} . (On pourra utiliser le résultat de Minkowski sur les normes de tels idéaux)