Chapitre 2

POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

2.1 Polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Il ne s'agit pas ici de développer la théorie des polynômes mais seulement d'énoncer quelques résultats utiles au calcul de primitives et d'intégrales.

2.1.1 Vocabulaire sur les polynômes

On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$K[X]$ est donc l'ensemble des P tels que $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de scalaires tous nuls à partir d'un certain rang.
Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même puissance sont deux à deux égaux.
Le *degré* du polynôme non nul P défini par $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est le plus grand des entiers n tels que a_n soit non nul. On note $d = \deg(P)$ (a_d est dit *coefficient dominant* de P). On convient que le polynôme nul a pour degré $-\infty$.
On appelle *valuation* de P le plus petit des entiers n tels que a_n soit non nul. On note $r = val(P)$. On convient que le polynôme nul a pour valuation $+\infty$.
On a donc $P(X) = a_r X^r + a_{r+1} X^{r+1} + \cdots + a_d X^d$ (avec $r \leq d$). On définit la somme et le produit de deux polynômes de la manière suivante :
Si P et Q sont deux polynômes de $K[X]$, avec $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, et $Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, où les a_n et les b_n sont des scalaires tous nuls à partir d'un certain rang, alors :

- le polynôme somme s'écrit $P+Q$, avec $(P+Q)(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$, où $c_n = a_n + b_n$.
- le polynôme produit s'écrit PQ, avec $(PQ)(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n X^n$, où $d_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$.

Propriétés :
Soient P et Q deux polynômes. Alors :

- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $val(PQ) = val(P) + val(Q)$

- $\deg(P+Q) \leq \mathrm{Sup}\{\deg(P);\deg(Q)\}$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ et $val(P+Q) \geq \mathrm{Inf}\ \{val(P);val(Q)\}$ avec égalité si $val(P) \neq val(Q)$.

Démonstration : Laissée en exercice.

Remarque : Dans toute la suite, on identifiera souvent le polynôme P avec la fonction polynôme P qui à tout k de K associe $P(k)$.

2.1.2 Division euclidienne

Théorème 6 *Soient A et B deux polynômes, $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tel que : $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Les polynômes Q et R s'appellent respectivement quotient et reste dans la division euclidienne de A par B.*

Démonstration : Unicité Soit (Q',R') un autre couple solution. Alors on a :
$O = B(Q-Q') + (R-R')$ c'est à dire $B(Q-Q') = R'-R$ et donc :
$\deg(R'-R) = \deg(B) + \deg(Q-Q')$.
Or $\deg(R'-R)$ est inférieur à $\sup\{\deg(R');\deg(R)\}$ donc strictement inférieur à $\deg(B)$. Cela implique que $Q = Q'$ et par suite que $R = R'$.
Existence On la montre par récurrence sur le degré de A. Lorsque $\deg(A) < \deg(B)$, le couple $(0,A)$ convient. Supposons alors l'existence montrée pour tous les polynômes de degré strictement inférieur à n et soit A de degré n avec $n \geq \deg(B)$. On a : $A = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ et $B = b_pX^p + \cdots + b_1X + b_0$ avec $a_n \neq 0, b_p \neq 0$ et $n \geq p$. Posons alors $A_1 = A - \dfrac{a_n}{b_p}X^{n-p}B$.
$\deg(A_1) < n$ donc par hypothèse de récurrence, $A_1 = BQ_1 + R_1$ avec $\deg(R_1) < \deg(B)$. D'où $A = B(Q_1 + \dfrac{a_n}{b_p}X^{n-p}) + R_1$.
Cette démonstration fournit la méthode pratique d'obtention de Q et R (division suivant les puissances décroissantes).
Définition : Lorsque $R = 0$, on dit que B *divise* A : $B|A$.
Remarque : Si B divise A, $\deg(B) \leq \deg(A)$, et si $\deg(B) = \deg(A)$, alors $B = \lambda A$, avec $\lambda \in K$.
Exemple : La division euclidienne de $X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ par $X^2 + 1$ s'écrit:

$$X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2+1)(X+3) + X - 2.$$

$X + 3$ est le quotient, et $X - 2$ est le reste.
Le calcul peut s'effectuer de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll|ll}
A & X^3+3X^2+2X+1 & X^2+1 & B \\ \cline{3-4}
Q_1B & X^3 \qquad\quad +X & & \\ \cline{1-2}
A-Q_1B & \qquad 3X^2 \ +X \ +1 & \underbrace{X \ +3} & Q \\
Q_2B & \qquad 3X^2 \qquad\ +3 & Q_1 \ \ Q_2 & \\ \cline{1-2}
R & \qquad\qquad\quad X \ -2 & &
\end{array}$$

2.1.3 Racines, irréductibilité

Un scalaire a de K est dit racine de P si $P(a) = 0$. a est racine de P si et seulement si $(X - a)$ divise P.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que a est racine d'ordre k, (ou de *multiplicité* k) de P si $(X - a)^k$ divise P et si $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P.
Exemple : Si $P(X) = X^4 + 2X^2 + 1$; alors :

$P(X) = (X^2 + 1)^2 = (X - i)^2(X + i)^2$, donc i et $-i$ sont racines de multiplicité 2 de P.
Un polynôme non constant P est dit *irréductible* sur K si ses seuls diviseurs sont les constantes non nulles et les polynômes de $K[X]$ de la forme λP ($\lambda \in K$). Concrètement, cela signifie que P n'est "pas factorisable".
Exemple : Soit $P(X) = X^2 + 1$. Si P admet un diviseur Q dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a :
soit $\deg(Q) = 0$, et Q est une constante ;
soit $\deg(Q) = 2$, et Q est de la forme λP ;
soit $\deg(Q) = 1$, et Q est de la forme $\lambda(X - a)$, avec λ et $a \in \mathbb{R}$, mais alors a serait racine de P: impossible.
Donc P est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$; en revanche, P n'est pas irréductible sur $\mathbb{C}[X]$:
on a $P(X) = (X - i)(X + i)$.
Deux polynômes de $K[X]$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sont dits *premiers entre eux* s'ils n'ont pas de racine complexe commune.

Théorème 7 *Si $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sont des racines distinctes du polynôme P de multiplicités respectives $k_1, k_2, \ldots, k_r$ alors P peut s'écrire sous la forme $P = (X - a_1)^{k_1} \ldots (X - a_r)^{k_r} Q$ où Q est un polynôme.*

Corollaire : Un polynôme de degré n a au plus n racines.

Théorème 8 *Soit A un polynôme de $K[X]$, et a un élément de K. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *$(X - a)^k$ divise A.*
- *$A(a) = A'(a) = \ldots = A^{(k-1)}(a) = 0$.*

En conséquence, a est racine d'ordre k de A si et seulement si

$$A(a) = A'(a) = \ldots = A^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad A^{(k)}(a) \neq 0.$$

On admettra ce théorème.
Exemple : On veut déterminer un polynôme P de degré 3 tel que $P(1) = P'(1) = 0$, $P(2) = 0$ et $P(0) = 2$. P admet 1 comme racine double et 2 comme racine simple, il est donc de la forme $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)Q(X)$, or P est de degré 3 donc Q est de degré 0; c'est un polynôme constant et $P(X) = \lambda(X - 1)^2(X - 2)$. On a de plus $P(0) = 2 = -2\lambda$. On en déduit que $P(X) = (X - 1)^2(2 - X)$. Cette méthode est plus rapide que la méthode d'identification qui consiste à poser $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ et à traduire les quatre conditions imposées, on se ramène alors à la résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues…

2.1.4 Quelques résultats utiles

Théorème 9 (de D'Alembert) *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.*

En conséquence, tout polynôme de $\mathbb{C}\,[X]$ de degré n admet exactement n racines (comptées avec leurs multiplicités) et est donc factorisable en un produit de facteurs du premier degré. On dit que tout polynôme de $\mathbb{C}\,[X]$ est scindé et que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

2.1.5 Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$

Proposition 1 *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{P(\alpha)} = P(\bar{\alpha})$. En particulier, α est racine de P si et seulement si $\bar{\alpha}$ l'est aussi.*

Soit alors P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On peut considérer P comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et à ce titre, le décomposer en un produit de facteurs du premier degré de la forme $(X - \alpha_i)$ où les α_i sont les racines complexes de P, comptées avec leur multiplicité. A chaque racine α_i de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ correspond la racine $\overline{\alpha_i}$, or $(X - \alpha_i)(X - \overline{\alpha_i}) = X^2 - sX + p$ où $s = \alpha_i + \overline{\alpha_i} \in \mathbb{R}$ et $p == \alpha_i\overline{\alpha_i} \in \mathbb{R}$ vérifient $s^2 - 4p < 0$. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Théorème 10 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont soit de la forme: $\lambda(X-\alpha)$ ($\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$), soit de la forme $\lambda(X^2 - sX + p)$ avec $s^2 - 4p < 0$ ($s, p \in \mathbb{R}$). Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut se décomposer en produit de tels facteurs irréductibles.*

Exemple : Décomposer le polynôme $P = X^6 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$. On effectue d'abord la décomposition dans $\mathbb{C}$ (en utilisant les racines 6ièmes de l'unité) :
$P = (X-1)(X-j)(X-j^2)(X+1)(X+j)(X+j^2)$, puis on regroupe les facteurs conjugués pour obtenir : $P = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

2.2 Fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

2.2.1 Définition

On appelle fraction rationnelle à une indéterminée tout couple (P, Q) de $K[X] \times K[X]^*$. On note $\frac{P}{Q}$. Si $PS = QR$, on identifie les deux fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$. (On dit aussi que ce sont deux représentants de la même fraction). Toute fraction rationnelle admet au moins un représentant irréductible (P_0, Q_0) (c'est à dire tel que P_0 et Q_0 soient premiers entre eux).

L'ensemble des fractions rationnelles est noté $K(X)$.

2.2.2 Pôle

Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction écrite sous forme irréductible. On appelle pôle de R toute racine de Q. a est un pôle d'ordre n de R si a est une racine de multiplicité n de Q ; si $n = 1$, on dit que a est un pôle simple de R.

Exemple : Soit $R(X) = \frac{X^2 - 3X + 2}{X^4 - 1}$. R n'est pas sous forme irréductible, car on a :
$R(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{X-2}{(X+1)(X-i)(X+i)}$.
Les pôles de R sont donc -1, i et $-i$ (ils sont tous simples).

2.2.3 Décomposition en éléments simples

Partie entière d'une fraction rationnelle

Proposition 2 *Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction écrite sous forme irréductible. Il existe un unique polynôme E (appelé partie entière de la fraction R et noté $\mathcal{E}(R)$) et un unique polynôme P_1 tels que $\frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q}$ et $\deg(P_1) < \deg(Q)$.*

Démonstration : Cette écriture est équivalente à $P = QE + P_1$ et donc E et P_1 sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par Q.
Exemple : La division euclidienne de $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X + 1$ par $Q(X) = X^2 - 3X + 1$ s'écrit:
$2X^4 + 3X^3 - X + 1 = (X^2 - 3X + 1)(2X^2 + 9X + 25) + 65X - 24$, on a donc:

$$\frac{2X^4 + 3X^3 - X + 1}{X^2 - 3X + 1} = 2X^2 + 9X + 25 + \frac{65X - 24}{X^2 - 3X + 1}$$

Théorème 11 *Pour toute fraction rationnelle* $\dfrac{P}{Q}$ *de* $K(X)$ *dont le dénominateur admet la décomposition en facteurs irréductibles sur* K*:*
$Q = A^\alpha B^\beta \cdots L^\lambda$ *(où* $A, B, \cdots, L$ *sont des polynômes irréductibles de* $K[X]$*, et* α *,* β *,* $\cdots$*,* λ *des entiers strictement positifs), il existe un unique système de polynômes*
$E, A_i\,(1 \leq i \leq \alpha),\ B_j\,(1 \leq j \leq \beta), \cdots, L_k\,(1 \leq k \leq \lambda)$ *de* $K[X]$ *(i, j,* $\cdots$*,k entiers) vérifiant les conditions :*

- $\dfrac{P}{Q} = E + \dfrac{A_1}{A} + \dfrac{A_2}{A^2} + \cdots + \dfrac{A_\alpha}{A^\alpha} + \dfrac{B_1}{B} + \dfrac{B_2}{B^2} + \cdots + \dfrac{B_\beta}{B^\beta} + \cdots + \dfrac{L_\lambda}{L^\lambda}$
- $\forall i \ \deg(A_i) < \deg(A); \forall j \ \deg(B_j) < \deg(B); \cdots; \forall k \ \deg(L_k) < \deg(L)$
- *E est la partie entière de* $\dfrac{P}{Q}$.

L'écriture précédente se nomme la *décomposition en éléments simples* de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$. Les $\dfrac{A_1}{A}$,..., $\dfrac{L_\lambda}{L^\lambda}$ sont les *éléments simples.* Si le dénominateur est une puissance d'un polynôme de degré 1, on parle d'éléments de première espèce ; si c'est une puissance d'un polynôme de degré 2, on parle d'élément de deuxième espèce.
Exemple : $\dfrac{3X^4 + 7X^3 + 11X^2}{(X^2 + X + 1)^3} = \dfrac{3}{X^2 + X + 1} + \dfrac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^2} + \dfrac{-8X - 4}{(X^2 + X + 1)^3}$

2.2.4 Pratique de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$. Dans $\mathbb{C}[X]$ tous les polynômes sont scindés et Q s'écrivant sous la forme $Q = k(X - a)^\alpha (X - b)^\beta \ldots (X - l)^\lambda$, on a la décomposition théorique

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{a_1}{X - a} + \frac{a_2}{(X - a)^2} + .. + \frac{a_\alpha}{(X - a)^\alpha} + \frac{b_1}{X - b} + \cdots + \frac{l_\lambda}{(X - l)^\lambda}$$

(il n'y a que des éléments de première espèce).
La décomposition s'effectue donc de la manière suivante :

- Première étape : déterminer la partie entière de la fraction.
- Deuxième étape : décomposer si nécessaire le dénominateur en facteurs irréductibles, écrire la forme de la décomposition, puis déterminer les coefficients.

Exemple 1: $A(X) = \dfrac{X^4 + 1}{X^3 - 1}$
La partie entière de A est X et $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ donc A se décompose sous la

forme $A(X) = X + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-j} + \dfrac{c}{X-j^2}$. En écrivant $A = \bar{A}$, on a $a = \bar{a}$, $b = \bar{c}$ et $c = \bar{b}$. Puis on multiplie A par $(X-1)$; on obtient:

$$\frac{X^4+1}{(X-j)(X-j^2)} = X(X-1) + a + \left(\frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}\right)(X-1)$$

En posant $X = 1$ on trouve donc $a = \dfrac{2}{3}$; de même la multiplication par $(X-j)$ donne $b = -\dfrac{1}{3}$, et donc $c = \bar{b} = -\dfrac{1}{3}$. D'où la décomposition de A : $A(X) = X + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{X-1} - \dfrac{1}{X-j} - \dfrac{1}{X-j^2}\right)$.

Exemple 2: $B(X) = \dfrac{4}{(X^2-1)^2}$

La décomposition théorique est $B(X) = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{d}{(X-1)^2}$.
La parité de B donne $a = -c$ et $b = d$.
Par la méthode précédente (ici il faut multiplier par $(X-1)^2$) on a $d = 1$.
On fait passer les termes connus dans le 1er membre et on simplifie.
D'où $\dfrac{-2}{X^2-1} = \dfrac{a}{X+1} - \dfrac{a}{X-1}$ et on obtient donc par identification $a = 1$.
$B(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$.

2.2.5 Pratique de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

Toutes les méthodes vues précédemment s'appliquent encore dans le cas d'une décomposition sur $\mathbb{R}$. Mais il apparait cette fois ci dans la décomposition théorique des éléments simples de deuxième espèce du type $\dfrac{rX+s}{(X^2+pX+q)^\alpha}$ $(p^2 - 4q < 0)$.
Il y a donc ici une autre étape, consistant à déterminer les coefficients r et s ci-dessus.

Exemple 1: $D(X) = \dfrac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2}$.

La décomposition théorique est $D(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{cX+d}{X^2+1} + \dfrac{eX+f}{(X^2+1)^2}$. En multipliant D par $(X^2+1)^2$ et en faisant $X = i$, on obtient e et f. En faisant passer dans le 1er membre, on obtient une fraction dont le dénominateur est $X(X-1)(X^2+1)$. Il suffit alors par exemple d'utiliser la multiplication par X^2+1 et de faire de nouveau $X = i$ pour ne plus avoir que des éléments de première espèce, dont on peut déterminer les coefficients avec une des méthodes vues plus haut, ou encore en multipliant les deux membres de l'égalité par X, et en faisant tendre X vers $+\infty$. Finalement, on obtient donc :
$D(X) = \dfrac{-1}{X} + \dfrac{1}{2(X-1)} + \dfrac{X-1}{2(X^2+1)} + \dfrac{X}{(X^2+1)^2}$.

Exemple 2: $F(X) = \dfrac{2X^7 + X^6 - X^3 + 3}{(X^2+X+1)^3} = \dfrac{A}{B^3}$.

On effectue la division euclidienne de A par B, puis du quotient par B et on réitère l'opération.
$F(X) = 2X - 5 + \dfrac{3X+10}{X^2+X+1} + \dfrac{-7X-5}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{2X+3}{(X^2+X+1)^3}$.

2.2.6 Récapitulatif des méthodes utilisées

Pour décomposer sur $\mathbb{R}$ une fraction rationnelle irréductible, de partie entière nulle, on peut :

- Si a est un pôle d'ordre k de la fraction, multiplier par $(X-a)^k$ et remplacer X par a.
- Multiplier par $(X^2+pX+q)^\alpha$ et remplacer X par une racine complexe du trinôme (X^2+pX+q).
- Des considérations de parité donnent des relations entre certains coefficients.
- Faire passer certains termes connus dans l'autre membre et réduire.
- Méthode des divisions euclidiennes successives.
- Remplacer X par un réel ou un complexe fixé différent des pôles.
- Faire tendre X vers l'infini (limite), après avoir éventuellement multiplié par un facteur approprié.

L'emploi des méthodes suivantes est également possible, mais fortement déconseillé :

- Faire la décomposition sur $\mathbb{C}$ et regrouper les termes conjugués.
- Méthode des coefficients indéterminés (pôles compliqués) : il est toujours possible d'identifier les coefficients de la décomposition théorique en réduisant au même dénominateur…