# Chapitre 4

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## 4.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

### 4.1.1 Présentation du problème

Nous nous intéressons à la résolution des équations de la forme

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Dans cette équation, $a$ et $b$ sont des fonctions de $x$, définies et continues sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$. Par exemple

$$y' + y \sin x = 2 \sin x$$

sur $\mathbb{R}$. On cherche une fonction $y$ de $x$, définie et continûment dérivable sur $I$, qui vérifie l'égalité ci-dessus (où $y'$ est bien sûr la dérivée de $y$). C'est une équation différentielle (c'est à dire une équation faisant intervenir une fonction inconnue $y$ et ses dérivées). Dire qu'elle est du premier ordre veut dire que cette équation ne fait intervenir que la fonction $y$ et sa dérivée première $y'$.

La *linéarité* est une propriété importante. On dispose d'une méthode générale pour les équations linéaires : on remarque que si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions de l'équation linéaire $u(y) = b$, alors leur différence $y_1 - y_2$ vérifie $u(y_1 - y_2) = 0$. On est ainsi conduit à considérer l'équation sans second membre, ou équation homogène $u(y) = 0$. Supposons que l'on a déterminé l'ensemble $S$ des solutions de l'équation sans second membre , et que l'on connaisse une solution particulière $y_1$ de l'équation complète. Alors $y$ est solution de l'équation complète si et seulement si on a $y = y_1 + z$ où $z \in S$ est solution de l'équation sans second membre. Ceci s'énonce de la manière suivante.

> *La solution générale de l'équation linéaire complète est somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre.*

Ceci va guider notre démarche pour l'équation différentielle linéaire du premier ordre. On commence par chercher la solution générale de l'équation sans second membre, puis on voit comment trouver une solution de l'équation complète.

### 4.1.2 La solution générale de l'équation sans second membre

Nous cherchons la solution générale de l'équation

$$y' + a(x)y = 0,$$

où $a$ est une fonction réelle continue sur l'intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$. Si $y \neq 0$, on peut écrire $y'/y = -a(x)$, et on reconnait à gauche la dérivée de $\ln(|y|)$. On en déduit donc, si $A = \int a(x)\,dx$ est une primitive de $a$ sur $I$, que $\ln(|y|) = -A(x) + C$ où $C$ est une constante réelle, d'où

$$y = Ke^{-A(x)} = Ke^{-\int a(x)\,dx},$$

où $K$ est une constante réelle. Ce calcul est délicat à justifier complètement (en particulier l'hypothèse $y \neq 0$), mais il nous donne tout de même la solution.

**Théorème 1** *La solution générale de l'équation sans second membre $y' + a(x)y = 0$ est*

$$y = Ke^{-A(x)},$$

*où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$, et $K$ une constante réelle.*

*Démonstration :* Soit $y$ une fonction continûment dérivable sur $I$. Puisque $e^{-A(x)}$ ne s'annule jamais sur $I$, on peut bien poser

$$y(x) = u(x)e^{-A(x)} \qquad \text{c'est à dire} \qquad u(x) = e^{A(x)}y(x).$$

Ceci définit une fonction $u$ continûment dérivable sur $I$. On a

$$y' + a(x)y = u'e^{-A(x)} + u(-a(x)e^{-A(x)}) + a(x)ue^{-A(x)} = u'e^{-A(x)},$$

et donc $y$ est solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$ si et seulement si $u'e^{-A(x)} = 0$, c'est à dire si et seulement si $u$ est une constante puisque $e^{-A(x)}$ ne s'annule pas sur $I$. Ceci montre le théorème.
Ceci nous donne la réponse, dans la mesure où l'on sait calculer une primitive de $a$. Considérons par exemple l'équation sans second membre

$$y' + y\sin x = 0$$

sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $-\sin x$ est $\cos x$ , et donc la solution générale de cette équation est

$$y = Ke^{\cos x},$$

où $K$ est une constante réelle.

Remarquons qu'une solution ou bien est constamment nulle sur l'intervalle $I$, ou bien ne s'annule jamais sur $I$. Ceci justifie a posteriori le calcul qui consistait à exclure le cas $y = 0$ et à diviser par $y$.

### 4.1.3 Solution de l'équation complète

On cherche la solution générale de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, connaissant la solution générale de l'équation sans second membre $y' + a(x)y = 0$, sous la forme $y(x) = Kz(x)$ où $K$ est une constante réelle et $z(x) = e^{-A(x)}$, avec $A$ une primitive de $a$.

On sait, d'après la discussion ci-dessus, qu'il suffit de connaître une solution particulière de l'équation complète. On a parfois la chance d'en voir une sans calcul. Par exemple, $y = 2$ est une solution évidente de

$$y' + y\sin x = 2\sin x,$$

et donc la solution générale de cette équation est

$$y = 2 + Ke^{\cos x}.$$

Si ce n'est pas le cas, on dispose de la méthode de *variation de la constante*. Elle consiste à poser $y(x) = u(x)z(x)$, et à trouver $u$ pour que $y$ soit solution de l'équation complète. On a

$$y' + a(x)y = u'z + uz' + a(x)uz = u'z$$

puisque $z$ est solution de l'équation sans second membre. Donc $y$ est solution de l'équation complète si et seulement si $u' = b(x)/z(x)$ (on peut bien diviser puisque $z$ ne s'annule jamais sur $I$). Si $B(x)$ est une primitive de $b(x)/z(x) = b(x)e^{A(x)}$, alors $e^{-A(x)}B(x)$ est une solution particulière de l'équation complète. Récapitulons.

**Théorème 2** *Soit $a$ et $b$ deux fonctions réelles continues sur l'intervalle ouvert $I$. Soient $A$ une primitive de $a$, et $B$ une primitive de $be^A$. Alors la solution générale de l'équation différentielle*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

*est*

$$y(x) = e^{-A(x)}(B(x) + K),$$

*où $K$ est une constante réelle.*

On a donc ramené le problème de résolution de l'équation différentielle au calcul de deux primitives. Par exemple, résolvons

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

sur l'intervalle $]0, 1[$. Une primitive de $1/x$ est $\ln x$, donc la solution générale de l'équation sans second membre est $y = Kx$. On fait varier la constante en posant $y = u(x)x$, ce qui donne en portant dans l'équation complète $u' = 1/\sqrt{1-x^2}$ d'où une solution particulière
$y = x \operatorname{Arcsin}(x)$. La solution générale de l'équation sur $]0, 1[$ est donc

$$y = x(\operatorname{Arcsin}(x) + K),$$

où $K$ est une constante réelle.

### 4.1.4 Solution vérifiant une condition initiale

La donnée d'une *condition initiale* pour l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur l'intervalle ouvert $I$ est la donnée d'un point $x_0$ de $I$ et d'un réel $y_0$. Une solution satisfaisant à cette condition initiale est une solution $y$ telle que $y(x_0) = y_0$.

**Théorème 3** *Il existe une et une seule solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur $I$ satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.*

*Démonstration :* On a vu que la solution générale s'écrit

$$y = e^{-A(x)}(B(x) + K),$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$, $B(x)$ une primitive de $e^{A(x)}b(x)$, et $K$ une constante réelle. La condition initiale permet de déterminer cette constante :

$$y_0 = e^{-A(x_0)}(B(x_0) + K), \quad \text{soit} \quad K = e^{A(x_0)}y_0 - B(x_0),$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution vérifiant la condition initiale.
Par exemple, la solution de $y' + y \sin x = 2 \sin x$ vérifiant $y(0) = 0$ est $2 + Ke^{\cos x}$ avec $0 = 2 + Ke$, d'où $K = -2/e$ et $y = 2(1 - e^{\cos x - 1})$.

Le problème d'existence et d'unicité de solution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale (appelé problème de Cauchy) est un problème important de la théorie des équations différentielles.

## 4.2 Equations du premier ordre à variables séparées

On appelle équation différentielle à variables séparées une équation de la forme

$$f(y)y' = g(x), \tag{1}$$

où $f$ est une fonction réelle continue dans un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction réelle et continue sur un intervalle ouvert $J$.
**Remarque :** On peut écrire "$f(y)dy = g(x)dx$", ce qui explique leur nom.

**Proposition 1** *Soit $F$ une primitive de $f$ dans $I$ et $G$ une primitive de $g$ dans $J$. Pour qu'une fonction $x \longrightarrow y(x)$, définie et dérivable dans un sous-intervalle de $J$, vérifie l'équation (1), il faut et il suffit que*

$$F(y(x)) = G(x) + C,$$

*où $C$ est une constante réelle.*

*Démonstration :* Pour que la fonction dérivable $x \longrightarrow F(y(x)) - G(x)$ soit constante dans l'intervalle de définition de la fonction $y$, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle ; or cette dérivée vaut $f(y(x))y'(x) - g(x)$ ; elle est donc nulle.
**Remarque :** Si on suppose de plus que, pour tout $y \in I$, $f(y) \neq 0$, on en déduit que $F$ a une dérivée non nulle ; elle est donc bijective de $I$ dans $F(I)$ et $y(x) = F^{-1}(G(x) + C)$.
Donnons deux exemples:
**Exemple 1 :** Résoudre $yy' = \cos x$ avec la condition initiale $y(0) = -1$. On obtient en intégrant $\int y\, dy = \int \cos x\, dx + C$, soit $y^2 = 2\sin x + 2c$. La condition initiale impose $c = 1/2$. On a donc $y^2 = 2\sin x + 1$. Or $y(0) = -1$, donc on obtient $y = -\sqrt{1 + 2\sin x}$ sur $[-\pi/6, 7\pi/6]$.
**Exemple 2 :** Résoudre $y' = y^2$ avec la condition initiale $y(1) = 1$. Pour $y \neq 0$, on écrit $y'/y^2 = 1$, ce qui donne en intégrant $-1/y = x + c$. La condition initiale impose $c = -2$, d'où une solution $y = 1/(2 - x)$ définie sur l'intervalle $]-\infty, 2[$.

## 4.3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On cherche ici à résoudre l'équation

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

où $a$, $b$, $c$ sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$, et $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. On veut trouver les fonctions $y$, deux fois continûment dérivables de $I$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifient cette équation. C'est une équation différentielle du second ordre car elle fait intervenir la dérivée seconde de $y$.
C'est une équation linéaire, c'est-à-dire que, si $y_1$ et $y_2$ sont solutions de l'équation $u(y) = f(x)$, alors $u(y_1 - y_2) = 0$. On est ainsi amené à résoudre l'équation sans second membre $u(y) = 0$. Supposons que l'on ait déterminé l'ensemble $S$ des solutions de l'équation sans second membre, et que l'on connaisse une solution particulière $y_1$ de l'équation complète. Alors $y$ est solution de l'équation complète si et seulement si on a $y = y_1 + z$ où $z \in S$ est solution de l'équation sans second membre. Ceci s'énonce de la manière suivante.

> *La solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète.*

### 4.3.1 L'équation sans second membre

On s'intéresse ici à l'équation sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

On recherche une solution de la forme $y = e^{rx}$, où $r$ est une constante. En substituant dans l'équation, on trouve

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Le polynôme $P(r) = ar^2 + br + c$ s'appelle *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle. Trois cas sont à distinguer.

1. *Le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes* $r_1$ *et* $r_2$ ($b^2 - 4ac > 0$). Alors $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ sont solutions de l'équation sans second membre. La solution générale de l'équation sans second membre sur $\mathbb{R}$ est

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

   où $c_1$ et $c_2$ sont deux constantes réelles.

2. *Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées distinctes* $\lambda = \alpha + i\beta$ *et* $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ ($b^2 - 4ac < 0$). Alors $e^{\lambda x}$ et $e^{\overline{\lambda} x}$ sont des fonctions *à valeurs complexes* de $x$, qui sont solutions de l'équation différentielle sans second membre. On a

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) \\ e^{\overline{\lambda} x} &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) \end{aligned}$$

   Nous sommes intéressés par les solutions réelles. La partie réelle $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et la partie imaginaire $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ de $e^\lambda x$ sont des solutions réelles de l'équation, et la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation sans second membre est

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)),$$

   où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes réelles.

3. *Le polynôme caractéristique a une racine réelle double* $s$ ($b^2 - 4ac = 0$). Cette racine vérifie aussi $P'(s) = 2as + b = 0$. Alors $y_1 = e^{sx}$ est solution de l'équation, et aussi $y_2 = xe^{sx}$. En effet

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = \Big(a(2s + s^2 x) + b(1 + sx) + cx\Big)\, e^{sx} = 0.$$

   La solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation sans second membre est

$$y = e^{sx}(c_1 + c_2 x),$$

   où $c_1$ et $c_2$ sont deux constantes réelles.

**Théorème 4** *La solution générale de l'équation sans second membre* $ay'' + by' + cy = 0$*, où* $a$*,* $b$ *et* $c$ *sont des réels et* $a \neq 0$ *est*

| de la forme | si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a |
|---|---|
| $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ | deux racines réelles distinctes $r_1$et $r_2$ |
| $y(x) = (Ax + B)e^{sx}$ | une racine réelle double $s$ |
| $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ | deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\overline{r}$ |

*où* $A$ *et* $B$ *sont des constantes réelles.*

Nous avons montré que ces fonctions étaient bien solutions de l'équation sans second membre; nous admettrons que ce sont les seules.

### 4.3.2 Solution particulière de l'équation complète

Rappelons d'abord deux choses.

- Toute astuce est bonne pour trouver *une* solution de $ay'' + by' + cy = f(x)$.
- On peut décomposer $f(x)$ en morceaux plus simples. Si $f(x) = f_1(x) + \cdots + f_k(x)$ et si

$$\begin{aligned} az_1'' + bz_1' + cz_1 &= f_1(x) \\ &\vdots \\ az_k'' + bz_k' + cz_k &= f_k(x), \end{aligned}$$

  alors $z = z_1 + \cdots + z_k$ vérifie $az'' + bz' + cz = f(x)$. C'est ce qu'on appelle le "principe de superposition des solutions".

Nous passons en revue quelques cas particuliers importants où l'on connait a priori la forme d'une solution particulière.

**Second membre de la forme** $f(x) = e^{\lambda x}P(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ polynôme. On cherche une solution de la même forme, c.-à-d. de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ où $Q(x)$ est aussi un polynôme

- de degré égal à $\deg P$ si $\lambda$ n'est pas racine du polynôme caractéristique ($a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$),
- de la forme $xQ_1(x)$ avec $\deg Q_1 = \deg P$ si $\lambda$ est racine simple du polynôme caractéristique,
- de la forme $x^2Q_2(x)$ avec $\deg Q_2 = \deg P$ si $\lambda$ est racine double du polynôme caractéristique.

On trouve les coefficients de $Q$ par identification. Donnons deux exemples.

1. $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$. Ici il n'y a pas d'exponentielle, ce qui revient à dire que $\lambda = 0$; ce n'est pas une racine du polynôme caractéristique. On cherche une solution $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. En portant dans l'équation on trouve

$$\alpha x^2 + (\beta + 2\alpha)x + \gamma + \beta + 2\alpha = x^2 + x + 1.$$

   L'identification des coefficients nous donne un système linéaire de trois équations à trois inconnues, que l'on résout facilement en $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$. On a donc comme solution particulière $x^2 - x$.

2. $y'' - y' = e^x(x + 1)$. Ici $\lambda = 1$ qui est racine simple du polynôme caractéristique. On recherche une solution de la forme $y = e^x x(\alpha x + \beta)$. En portant dans l'équation on trouve

$$e^x(2\alpha x + 2\alpha + \beta) = e^x(x + 1),$$

   ce qui donne $\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$, et la solution particulière $y = e^x x^2/2$. Remarquer dans le calcul que le fait que $\lambda = 1$ est racine simple du polynôme caractéristique se manifeste par la disparition du terme en $x^2$.

**Second membre de la forme** $f(x) = e^{rx}\cos(sx)P(x)$ **ou** $f(x) = e^{rx}\sin(sx)P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme. On peut se ramener au cas précédent en constatant qu'on a dans le premier cas la partie réelle de $e^{(r+is)x}P(x)$, et dans le second cas la partie imaginaire. On procède alors comme ci-dessus, avec $\lambda = r + is$ complexe. Traitons l'exemple

$$(*) \qquad y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

Le second membre est la partie réelle de $f(x) = e^{(1+i)x}$. Ici $\lambda = 1 + i$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre $f(x)$, de la forme $e^{(1+i)x}\alpha x$. En remplaçant dans l'équation, on trouve
$e^{(1+i)x}(2i\alpha) = e^{(1+i)x}$, d'où $\alpha = -i/2$ et la solution particulière complexe $-ixe^{(1+i)x}/2$ de l'équation avec second membre $f(x)$. La partie réelle $\frac{1}{2}xe^x \sin x$ est une solution particulière de l'équation proposée.

Une autre façon de mener le calcul, sans passer par le complexe, est de rechercher une solution de la forme $e^{rx}(Q(x)\cos(sx) + R(x)\sin(sx))$ où $Q(x)$ et $R(x)$ sont des polynômes d'un des deux premiers types présentés ci-dessus, suivant que $r + is$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, ou est racine simple (comme le polynôme caractéristique est à coefficients réels, le cas d'une racine double non réelle ne se présente pas).

### 4.3.3 Solution vérifiant des conditions initiales

On considère une équation

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{1}$$

où $f$ est définie et continue sur un intervalle ouvert $I$. Soit $x_0$ un point de $I$.

**Proposition 2** *Etant donnés deux réels $y_0$ et $y'_0$, il existe une et une seule solution $y$ de l'équation différentielle (1) telle $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.*

Les *conditions initiales en $x_0$* sont les deux équations $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. On a pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants un résultat d'existence et d'unicité de solution vérifiant des conditions initiales.
On sait que la solution générale de l'équation (1) s'écrit $y(x) = z(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, où $z(x)$ est une solution particulière de (1), $y_1(x)$ et $y_2(x)$ les solutions fondamentales de l'équation sans second membre, $c_1$ et $c_2$ des constantes réelles. Il faut choisir ces constantes pour que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} c_1y_1(x_0) & + & c_2y_2(x_0) & = & y_0 - z(x_0) \\ c_1y'_1(x_0) & + & c_2y'_2(x_0) & = & y'_0 - z'(x_0) \end{array}\right.$$

On admet qu'il y a existence et unicité des solutions.
**Exemple 1.** On cherche la solution de l'équation $(*)$ de la section précédente, qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. La première condition, pour la solution générale

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x \sin x + (c_1 \cos x + c_2 \sin x)e^x$$

donne $c_1 = 1$. On a $y'(0) = c_1 + c_2$. La condition $y'(0) = 0$ donne $c_2 = -1$. La solution vérifiant les conditions initiales est donc

$$\frac{1}{2}xe^x \sin x + (\cos x - \sin x)e^x.$$

**Exemple 2.** A titre de récapitulation, traitons complètement le problème suivant : trouver la solution de

$$y'' - 3y' + 2y = e^x + \cos x \tag{2}$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Les racines du polynôme caractéristique sont 1 et 2, et la solution générale de l'équation sans second membre est $c_1e^x + c_2e^{2x}$.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre $e^x$, de la forme $\alpha xe^x$ puisque 1 est racine simple du polynôme caractéristique. Par identification, on trouve $\alpha = -1$.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre $\cos x$, de la forme $\beta \cos x + \gamma \sin x$. Ceci donne

$$(\beta - 3\gamma)\cos x + (3\beta + \gamma)\sin x = \cos x,$$

et l'on trouve $\beta = 1/10$ et $\gamma = -3/10$.

La solution générale de l'équation (2) est donc

$$y = -xe^x + \frac{1}{10}(\cos x - 3\sin x) + c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Des conditions initiales on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & = & y(0) & = & \frac{1}{10} + c_1 + c_2 \\ 0 & = & y'(0) & = & -\frac{13}{10} + c_1 + 2c_2 \end{array}\right.$$

qui a pour solution $c_1 = -3/2$, $c_2 = 7/5$.