Corrigé du contrôle continu du 21 novembre 1998

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 1}$

1) Ecrivons d'abord $1+i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle

$$1+i\sqrt{3} = 2\,\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{16}{e^{\frac{i\pi}{3}}} = -16e^{-\frac{i\pi}{3}} = e^{i\pi}\times 16e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ car } -1 = e^{i\pi} \\ &= 16e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{aligned}$$

On a donc montré que $Z = 16e^{\frac{2i\pi}{3}}\,(=16j)$.

2) D'après la formule vue en cours, si on note z_k, pour $k = 0, 1, 2$ ou 3, les quatre racines quatrièmes de Z, alors on a

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{16}e^{2i\frac{\pi}{12}+2ki\frac{\pi}{4}} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{k\pi}{2}} \end{aligned}$$

Donnons ces quatre racines sous forme algébrique

$$\begin{array}{llll} z_0 & = 2e^{i\frac{\pi}{6}} & & = \sqrt{3}+i \\ z_1 & = 2e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{i\pi}{2}} & = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} & = -1+i\sqrt{3} \\ z_2 & = 2e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2i\pi}{2}} & = 2e^{\frac{7i\pi}{6}} & = -\sqrt{3}-i \\ z_3 & = 2e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{3i\pi}{2}} & = 2e^{\frac{5i\pi}{3}} & = 1-i\sqrt{3}. \end{array}$$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 2}$

1) Le module de $-21-20i$ est $\sqrt{21^2+20^2} = \sqrt{841} = 29$.
On cherche $\omega = x+iy$ avec x et y réels tels que $-21-20i = \omega^2 = x^2-y^2+2ixy$. On en déduit que $x^2-y^2 = -21$ et $2xy = -20$. De plus $\mid(-21-20i)\mid = \mid\omega\mid^2$ donc $x^2+y^2 = 29$.
Le système $\begin{cases} x^2+y^2 = 29 \\ x^2-y^2 = -21 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 25 \end{cases}$.
Le produit xy vaut -10, il est donc négatif.
On en déduit que les deux racines carrées de $-21-20i$ sont $5i-2$ et $2-5i$.

2) Le discriminant de cette équation du second degré vaut

$$\Delta = (2-i)^2 - 8i(2-3i) = 4-1-4i-16i-24 = -(21+20i) = (5i-2)^2$$

d'après la question précédente.

Les deux racines de l'équation sont alors

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(2-i)+5i-2}{2i} = \dfrac{-4+6i}{2i} = \dfrac{3i-2}{i} = 3+2i \\ z_2 = \dfrac{-(2-i)-5i+2}{2i} = -2 \end{cases}$$

Exercice n°3

On fait le changement de variables $t = x^2+1$, d'où $dt = 2x\,dx$ et la primitive devient

$$\int 2x(x^2+1)e^{x^2}\,dx = \int te^{t-1}\,dt.$$

On fait alors une intégration par parties en posant

$$f(t) = t \text{ et } g'(t) = e^{t-1} \text{ d'où } f'(t) = 1 \text{ et } g(t) = e^{t-1}.$$

On obtient alors

$$\int te^{t-1}\,dt = te^{t-1} - \int e^{t-1}\,dt = te^{t-1} - e^{t-1} + C = (t-1)e^{t-1} + C = x^2e^{x^2} + C$$

où C est une constante réelle.

Une primitive de f est alors la fonction qui, à tout x réel, associe $x^2e^{x^2}$.

AUTRE SOLUTION

On fait une intégration par parties en posant

$$f(x) = x^2+1 \text{ et } g'(x) = 2xe^{x^2} \text{ d'où } f'(x) = 2x \text{ et } g(x) = e^{x^2}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int 2x(x^2+1)e^{x^2}\,dx &= (x^2+1)x^{x^2} - \int 2xe^{x^2}\,dx = (x^2+1)x^{x^2} - e^{x^2} + C \\ &= x^2e^{x^2} + C = x^2e^{x^2} + C \end{aligned}$$

où C est une constante réelle.

AUTRE SOLUTION

On fait le changement de variables $t = e^{x^2}$, d'où $dt = 2xe^{x^2}\,dx$ et $x^2 = \ln t$ et la primitive devient

$$\int 2x(x^2+1)e^{x^2}\,dx = \int (\ln t + 1)\,dt = \int \ln t\,dt + t.$$

On fait alors une intégration par parties dans l'intégrale restante en posant

$$f(t) = \ln t \text{ et } g'(t) = 1 \text{ d'où } f'(t) = 1/t \text{ et } g(t) = t.$$

On obtient alors

$$\int \ln t\,dt = t\ln t - \int dt = t\ln t - t + C$$

où C est une constante réelle. On en déduit que

$$\int 2x(x^2+1)e^{x^2}\,dx = t\ln t - t + C + t = t\ln t + C = e^{x^2}\ln e^{x^2} + C = x^2e^{x^2} + C.$$

Exercice n°4

1) La partie entière de la fraction rationnelle $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ est le quotient de la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X) = X^4 - X^3 - X + 1$. Après calcul, on trouve

$$A(X) = (X+1)B(X) + X^3 + X^2 - 2X + 3.$$

La partie entière de la fraction est donc $X+1$. On a également l'écriture

$$\frac{A(X)}{B(X)} = X + 1 + \frac{X^3 + X^2 - 2X + 3}{(X-1)^2(X^2+X+1)}.$$

2) Le polynôme $B(X)$ est donné sous la forme d'un produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ car le polynôme du second degré $X^2 + X + 1$ a un discriminant strictement négatif et n'a donc pas de racine réelle. On en déduit la forme théorique de la décomposition en éléments simples :

$$\frac{A(X)}{B(X)} = X + 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

où a, b, c, d sont quatre constantes réelles à déterminer.

3) On va déterminer ces quatre constantes en utilisant l'écriture

$$(E)\qquad \frac{X^3+X^2-2X+3}{(X-1)^2(X^2+X+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}.$$

- Détermination de b.
  On multiplie l'égalité précédente par $(X-1)^2$ et on prend $x=1$, on obtient
  $$b=\frac{1+1+-2+3}{1+1+1}=1.$$
- Détermination de c et d.
  On multiplie l'égalité (E) par X^2+X+1 et on fait $X=j$. On en déduit que
  $$\begin{aligned} cj+d &= \frac{j^3+j^2-2j+3}{(j-1)^2}=\frac{1-(1+j)-2j+3}{(j-1)^2}=\frac{3(1-j)}{(j-1)^2}=\frac{3}{1-j}\\ &= \frac{3(1-j^2)}{(1-j)(1-j^2)}=\frac{3(1-j^2)}{(1-j-j^2+j^3)}=\frac{3(1-j^2)}{(2-(j+j^2))}\\ &= \frac{3(1-j^2)}{(2+1)}=1-j^2=2+j \text{ car } 1+j+j^2=0 \text{ et } j^3=1. \end{aligned}$$
  On a alors $cj+d=j+2$. La partie réelle de cette égalité donne $-c/2+d=-1/2+2$ donc $-c+2d=3$. La partie imaginaire donne $c\sqrt{3}/2=\sqrt{3}/2$ donc $c=1$. On en déduit que $d=2$ et $c=1$.
- Détermination de a
  On multiplie (E) par X et on fait tendre X vers l'infini d'où $1=a+c$, or $c=1$ donc $a=0$.

On retrouve bien la forme indiquée dans le texte.