Chapitre 1

LES NOMBRES COMPLEXES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre comme dans la suite du polycopié, nous utiliserons les symboles suivants :

1. Symboles ensemblistes
   - $\in$: appartenance ; si E est un ensemble, $x \in E$ se lit : "x appartient à E".
   - $\subset$: inclusion ; si E et F sont deux ensembles, $F \subset E$ se lit : "F est inclus dans E" ; il ne faut pas confondre ce symbole et le précédent, le symbole d'inclusion sert uniquement à comparer des ensembles ; ainsi la propriété $x \in E$ s'écrit également $\{x\} \subset E$, où $\{x\}$ désigne le sous-ensemble de E ne contenant que l'élément x.
   - $\emptyset$: ensemble vide.
   - $\cap$: intersection.
   - $\cup$: réunion.
2. Connecteurs binaires
   - $\Longrightarrow$: implication ; si P et Q sont deux assertions, $P \Longrightarrow Q$ est une nouvelle assertion, qui se lit :"P implique Q".
   - $\Longleftrightarrow$: équivalence ; si P et Q sont deux assertions, $P \Longleftrightarrow Q$ est une nouvelle assertion, qui se lit :"P équivalente à Q". La distinction entre cette notion et celle citée ci-dessus étant une des bases du raisonnement mathématique, il faudra être extrêmement attentif à l'emploi de l'un ou l'autre symbole.
3. Quantificateurs
   - $\forall$: pour tout ; $\forall x \in E \ldots$ se lit :"Pour tout x appartenant à $E\ldots$".
   - $\exists$: il existe ; $\exists x \in E \ldots$ se lit :"Il existe x appartenant à $E\ldots$".

Nous nous bornerons ici à employer les symboles ci-dessus comme de simples notations. Pour leur utilisation plus poussée, et pour les techniques de démonstration associées, nous renvoyons le lecteur au module UE3-MIAS-MASS. Il faut cependant se rappeler qu'il ne s'agit en aucun cas d'abréviations ; ces symboles ne doivent jamais apparaître dans une phrase en langage courant. Pour caractériser les éléments d'un ensemble, on utilisera aussi la notation (non canonique !) : $|$ qui se lit "tel que" : par exemple, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ est $\mathbb{R}^+$.

1.2 Rappels

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble qui :

- Contient tous les nombres réels
- Est muni d'une addition et d'une multiplication vérifiant les mêmes propriétés que les opérations correspondantes de $\mathbb{R}$
- Contient un nombre i tel que $i^2 = -1$
- Est constitué de tous les nombres $z = a + ib$, avec a et b dans $\mathbb{R}$.

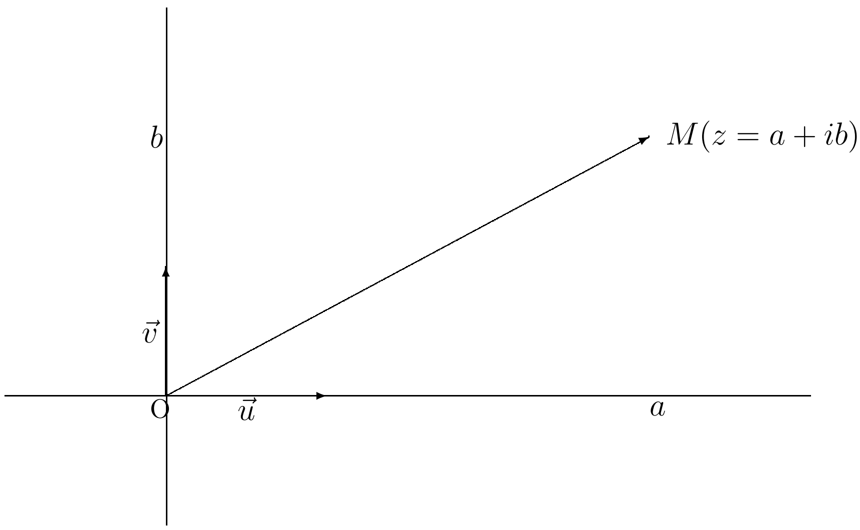
Remarque : Il est impossible de comparer deux nombres complexes : si z et z' sont deux complexes, l'expression "z plus grand que z'" n'a pas de sens ; il est en particulier absurde de parler de complexes positifs.

1.2.1 Vocabulaire

Soit z un complexe. L'écriture $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est dite *forme algébrique* de z.
a est *la partie réelle* de z, notée $Re(z)$. Si $a = 0$, on dit que z est imaginaire pur.
b est *la partie imaginaire* de z, notée $Im(z)$. Si $b = 0$, z est un réel !
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
Le *conjugué* de z est le complexe $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = a - ib$. On utilise fréquemment les propriétés $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, et $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ (c'est à dire z imaginaire pur).

1.2.2 Représentation géométrique

Soit $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on peut associer à z le point $M(a, b)$. On dit que M est *l'image* de z. Réciproquement, à tout point $M(a, b)$ du plan, on peut associer un unique complexe z, défini par $z = a + ib$, z est appelé *affixe* de M ; on dit aussi que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



1.3 Module et argument

1.3.1 Définition, propriétés

Soit un nombre complexe $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le module de z, noté $|z|$ est défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
Il vérifie les propriétés :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|zz'| = |z||z'|$
- si $z \neq 0$, $|\dfrac{1}{z}| = \dfrac{1}{|z|}$.

D'autre part, si z est réel, le module de z est sa valeur absolue.
Soit z un complexe non nul. On appelle argument de z, noté $arg(z)$, n'importe quelle mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, où M est l'image de z dans le plan. L'argument est donc défini à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.
0 n'a pas d'argument.
Soient z et z' deux complexes non nuls, si θ est un argument de z et θ' un argument de z', on a :

- $arg(zz') = \theta + \theta'$
- $arg(\dfrac{z}{z'}) = \theta - \theta'$
- $arg(\bar{z}) = -\theta$, $arg(-z) = \theta + \pi$
- z est réel si et seulement si $\theta \equiv 0\ (\pi)$, z est imaginaire pur si et seulement si $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$.

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et deux de leurs arguments diffèrent d'un multiple entier de 2π.

1.3.2 Complexes de module 1. Forme exponentielle

Géométriquement, on a $|z| = OM$, où M est l'image de z ; donc $|z| = 1$ si et seulement si l'image de z appartient au cercle de centre O et de rayon 1, dit cercle trigonométrique. Si θ est un argument de z, on a dans ce cas $z = \cos\theta + i\sin\theta$, que l'on note $z = e^{i\theta}$.
L'ensemble des complexes de module 1 est $U = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$.
Si z est un complexe non nul, alors $\dfrac{z}{|z|}$ est un complexe de module 1, donc en posant $\rho = |z|$, et $\theta = arg(z)$, z s'écrit : $z = \rho e^{i\theta}$. On appelle cette écriture la *forme exponentielle* de z. (Pour les propriétés de celle-ci, consulter un livre de terminale...)

1.4 Racines carrées d'un nombre complexe

1.4.1 Calcul des racines carrées

Soit z un complexe non nul, on cherche à résoudre l'équation $\omega^2 = z$.
On peut écrire ω et z sous forme cartésienne et identifier : si $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = \alpha + i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on obtient $\alpha^2 - \beta^2 = a$ et $2\alpha\beta = b$. Mais on a également, d'après l'égalité des modules, $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Lorsque z est réel (c'est à dire $b = 0$), on obtient les solutions $\omega = \pm\sqrt{a}$ si $a > 0$ et $\omega = \pm i\sqrt{-a}$ si $a < 0$.
Lorsque z n'est pas réel, on obtient deux valeurs opposées de α, dont on déduit deux valeurs opposées de β.
On peut aussi employer la forme exponentielle : en écrivant $z = re^{i\theta}$ et $\omega = \rho e^{i\alpha}$, on obtient $r = \rho^2$ et $\theta \equiv 2\alpha\ (2\pi)$. D'où $\rho = \sqrt{r}$ (car ρ est positif), et $\alpha \equiv \frac{\theta}{2}\ (\pi)$. On retrouve comme précédemment les deux racines opposées.
Exemple : Calculer les racines carrées de $z = 2 + 2i$.
Posons $\omega = \alpha + i\beta$ et résolvons $\omega^2 = z$. On obtient les équations : $\alpha^2 - \beta^2 = 2$, $\alpha^2 + \beta^2 = 2\sqrt{2}$, $2\alpha\beta = 2$. On en déduit qu'une racine de z est $\omega = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$, et l'autre est $-\omega$.
Mais on peut aussi écrire $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et en déduire que les racines carrées de z sont $\tau = 2^{\frac{3}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-\tau$. On peut de plus noter que $\tau = \omega$, car tous deux ont une partie réelle positive.
Remarques :

- Il faudra choisir la méthode la mieux adaptée en fonction du complexe z dont on veut calculer une racine. On utilisera en général la seconde si la forme exponentielle de z est évidente, et la première sinon.
- Il est interdit d'utiliser la notation $\sqrt{\ }$ pour exprimer une racine carrée d'un nombre complexe, car il ne s'agit pas d'une fonction sur $\mathbb{C}$.

1.4.2 Equation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

On veut résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b, c, et z sont des complexes, avec $a \neq 0$.
Comme dans le cas réel, on la met sous forme canonique :
$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0.$
Pour résoudre cette équation, on introduit une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$; on calcule celle-ci en utilisant l'une des méthodes du paragraphe précédent. Soit ω une telle racine, les solutions de l'équation sont donc :
$z_1 = \frac{-b+\omega}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\omega}{2a}$.

Théorème 1 *Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ admet toujours deux racines, distinctes ou confondues.*

Remarques :

- Si a, b, c sont des réels et si $\Delta < 0$, les deux solutions sont conjuguées (vérifier).
- La somme des racines est encore $S = z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et le produit $P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5 + 3i)z + 7i + 4 = 0$.
On a $\Delta = 2i$, une racine de Δ est donc $\omega = 1 + i$, d'où les solutions : $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = 3 + 2i$.

1.5 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient ω et z deux nombres complexes, on cherche à résoudre l'équation d'inconnue ω : $\omega^n = z$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > 2$, on utilisera le plus souvent la forme exponentielle.

1.5.1 Racines n-ièmes de l'unité

Pour résoudre $\omega^n = 1$, on emploie la forme exponentielle : $\omega = \rho e^{i\alpha}$, $1 = e^{i0}$, d'où l'équation $\rho^n e^{in\alpha} = e^{i0}$; on obtient donc $\rho^n = 1$ et $n\alpha \equiv 0\ (2\pi)$, d'où $\rho = 1$ et $\alpha \equiv 0\ (\frac{2\pi}{n})$. Les solutions sont donc les complexes de la forme $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où k est un entier relatif. Combien y a-t-il de solutions distinctes ? A chaque valeur de k correspond une valeur de α : $\alpha = \frac{2k\pi}{n}$, mais à deux valeurs de k différant de n correspondent deux valeurs de α différant de 2π et représentant donc le même nombre complexe : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = \omega_{k+n}$. Il y a donc au plus n solutions distinctes ; de plus les solutions obtenues pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sont bien toutes différentes. On obtient donc le théorème :

Théorème 2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $\omega^n = 1$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$, appelées racines n-ièmes de l'unité. Ce sont les ω_k définis par : $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

Exemples :

- Si $n = 2$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = -1$
- Si $n = 3$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
  Ce cas est à connaître absolument ! On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; on a $j^2 = \bar{j} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
  Il faut donc retenir : les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2.
- Si $n = 4$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\omega_2 = -1 = e^{i\pi}$, $\omega_3 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Théorème 3 *Les images des racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés, tracé sur le cercle unité, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.*

Soit un complexe $\omega \neq 1$. On a :

$$1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$$

donc si $\omega^n = 1$, le membre de gauche de l'égalité est nul.
D'autre part $\omega_k = \omega_1^k$, donc $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1} = 0$. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 4 *Si ω est une racine n-ième de l'unité, avec $\omega \neq 1$, alors $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = 0$. En particulier, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.*

Remarque : A retenir : $1 + j + j^2 = 0$.

1.5.2 Racines n-ièmes d'un complexe non nul

On veut généraliser l'étude précédente, et résoudre l'équation d'inconnue ω : $\omega^n = z$, où z est un complexe non nul (on écarte le cas $z = 0$ car, de manière évidente, seul 0 est dans ce cas solution) . On procède comme au paragraphe ci-dessus, avec les formes exponentielles ; l'équation devient : $\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$, d'où on tire $\rho = r^{\frac{1}{n}}$, et $\alpha \equiv \frac{\theta}{n}\ (\frac{2\pi}{n})$.

Théorème 5 *Soit n un entier non nul. Tout complexe non nul $z = re^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes distinctes dans $\mathbb{C}$, qui sont les $u_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$, avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

Remarque : On obtient toutes les racines n-ièmes d'un complexe non nul en multipliant l'une quelconque d'entre elles par toutes les racines n-ièmes de l'unité. (Vérifier)

Exemple : Calculer les racines quatrièmes de $z = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

On met tout d'abord z sous forme exponentielle. On obtient $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. D'où les racines quatrièmes de z :
$u_o = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{24}}$, $u_1 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{13\pi}{24}} = iu_0$, $u_2 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{25\pi}{24}} = -u_0$, $u_3 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{37\pi}{24}} = -iu_0$.