Polynômes et fractions rationnelles

Division euclidienne

Exercice n°1

Effectuer les divisions euclidiennes de

$$2X^5 - 5X^3 - 8X \text{ par } X + 3$$
$$6X^4 - 7X^3 - 10X^2 - 15X - 21 \text{ par } 3X^2 + X + 4$$
$$X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 5 \text{ par } X^2 + X + 1$$
$$X^7 - 1 \text{ par } X^3 - 1$$
$$3X^5 + X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 1 \text{ par } 3X^3 - 2X^2 + X - 1$$
$$X^2 + 1 \text{ par } X^3 + 2$$

Exercice n°2

Calculer le reste de la division dans $\mathbb{R}[X]$ de $(\cos a + X \sin a)^n$ par $X^2 + 1$

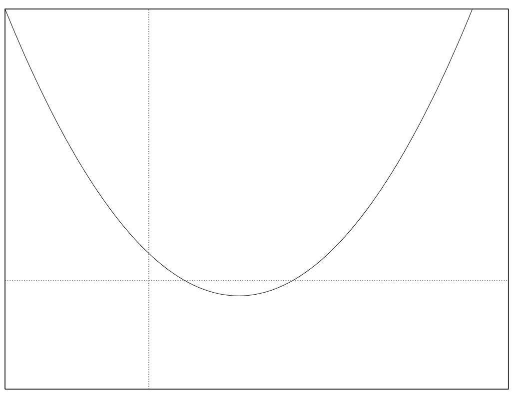
Exercice n°3

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et a et b deux nombres réels distincts. Calculer le reste $R(X)$ de la division de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Racines d'un polynôme

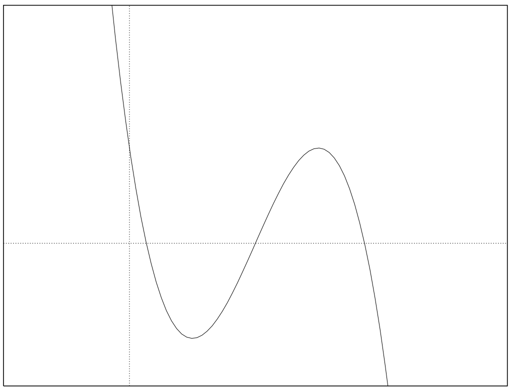
Exercice n°4

Trouver a, b et c tels que la fonction polynômiale $f(x) = ax^2 + bx + c$ soit représentée par la courbe ci-dessous.



Exercice n°5

Trouver a, b, c et d tels que la fonction polynômiale $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ soit représentée par la courbe ci-dessous.



Exercice n°6

On considère dans $\mathbb{C}$ l' équation

$$(E) \qquad P(z) = z^5 - z^4 + z^3 + z^2 + 2 = 0.$$

1) Montrer que si z est solution, $\bar{z}$ l'est aussi.

2) Trouver toutes les solutions de (E), sachant que $1+i$ en est une.

3) Donner la décomposition de $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°7

Construire un polynôme à coefficients réels de degré le plus petit possible, tel que 1 soit racine double, 2, 3 et $1+i$ soient des racines simples.

Multiplicité d'une racine

Exercice n°8

On considère le polynôme $P(X) = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$. Quelle est la multiplicité de 2 en tant que racine de P ?

Exercice n°9

Trouver (a, b) pour que $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$. Généraliser à $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Décomposition en facteurs irréductibles

Exercice n°10

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants en facteurs irréductibles

$$\begin{array}{ccc} X^3+1 & X^3-1 & X^3+2X^2+2X+1 \\ X^4+1 & X^4+X^2+1 & 1+X+X^2+X^3+X^4+X^5 \end{array}$$

Exercice n°11

Soit $A(X) = X^6 + aX^4 + bX^3 + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1) Déterminer a, b et c pour que 1 soit racine double de A et que j soit racine de A.

2) Montrer alors que $A \in \mathbb{R}[X]$ et que j est racine double.

3) Décomposer A en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°12

Soit le polynôme $P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1) Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.

2) Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?

3) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Décomposition en éléments simples

Exercice n°13

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes.

1) Fractions n'ayant que des pôles simples

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \qquad g(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \qquad h(x) = \frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$$

2) Fractions avec un facteur de degré 2 au dénominateur

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+2x+2}{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{3}{x^3+1} \qquad h(x) = \frac{4x^3}{x^4-1}$$

3) Un peu plus compliqué

$$f(x) = \frac{2}{x(x-1)^2} \qquad g(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3} \qquad h(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}$$

4) En décomposant d'abord sur $\mathbb{C}$

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1}$$

Exercice n°14

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes

$$f(x)=\frac{3x^2+12x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad g(x)=\frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x^2-4)}$$
$$h(x)=\frac{x^3-3x-4}{(x^2+2)(x^2+x+1)} \quad k(x)=\frac{x^5+4}{x^4+4x^2}$$
$$l(x)=\frac{x^4+2x^3+2x^2+3x}{(x+1)^2(x^2+1)} \quad m(x)=\frac{x^3-5x-6}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}$$

Exercice n°15

Extrait du contrôle continu de novembre 1998
On définit deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ par

$$\begin{cases} A(X)=X^5-2X+4 \\ B(X)=(X-1)^2(X^2+X+1) \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de retrouver l'égalité

$$(G) \qquad \frac{A(X)}{B(X)}=X+1+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{X+2}{X^2+X+1}.$$

1) Calculer la partie entière $E(X)$ de la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{A(X)}{B(X)}$.

2) Donner la forme théorique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction $\dfrac{A(X)}{B(X)}$.

3) Calculer les coefficients introduits dans l'écriture précédente et en déduire (G).
On ne procédera pas par réduction au même dénominateur

Exercice n°16

Extrait du contrôle continu de novembre 1999
On considère les polynômes $P(X)=X^8-2X^4+8X^3+1$ et
$Q(X)=X^6-X^4-X^2+1$.

1) Trouver des racines évidentes de $Q(X)$. Quelle est leur multiplicité ?

2) Décomposer $Q(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3) Donner la forme théorique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

4) Calculer les coefficients de cette décomposition.

Exercice n°17

Extrait de l'examen de septembre 1999
a étant un réel fixé, on définit le polynôme P par

$$P(X) = X^3 + (a-1)(X^2 - X) - 1.$$

1) Montrer que 1 est racine de P pour toute valeur de a.

2) Décomposer $P(X)$ en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ pour les valeurs suivantes de a.

a) $a = 2$

b) $a = -2$

c) $a = 1$

3) Donner la forme **théorique** de la décomposition en éléments simples de la fonction fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^3}{P(x)}$ pour les mêmes valeurs de a que dans la question précédente. **On ne demande pas de calculer les coefficients intervenant dans ces formes théoriques.**