Chapitre 7

Nombres réels et suites réelles

1. Les nombres réels

La démarche que nous allons suivre est de partir d'une liste (aussi restreinte que possible) de propriétés des nombres réels (les *axiomes*) que nous admettrons. Le premier axiome est que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné contenant $\mathbb{Q}$ et le second est celui de la borne supérieure. Nous redémontrerons toutes les autres propriétés que nous utiliserons à partir de ces axiomes. En fait nous ne nous donnerons pas la peine de redémontrer à partir des axiomes les propriétés classiques sur les manipulations d'identités algébriques ou d'inégalités. Nous nous attacherons surtout à *démontrer* les propriétés concernant les limites de suites. Pour démontrer ces propriétés, il faut avoir une définition précise de la notion de limite de suite. Nous donnerons plus loin des indications sur la manière de construire, à partir des nombres rationnels, un ensemble des nombres réels qui vérifie les axiomes que l'on a posés.

1.1. $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Il contient l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, et est muni de deux opérations (addition et multiplication) qui vérifient les propriétés suivantes.

1) L'addition est associative :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x+y)+z = x+(y+z).$$
2) L'addition a un élément neutre 0 :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+0 = 0+x = x.$$
3) Tout nombre réel a un opposé pour l'addition :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, \quad x+y = y+x = 0.$$
L'opposé d'un nombre réel x est unique : si y et z vérifient tous les deux $x+y = y+x = 0$ et $x+z = z+x = 0$, alors
$$y = y+0 = y+(x+z) = (y+x)+z = 0+z = z.$$
On désigne par $-x$ l'opposé de x.
4) L'addition est commutative :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y = y+x.$$

$\mathbb{R}$ est donc un *groupe commutatif.*

5) La multiplication est associative :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z).$$
6) La multiplication a un élément neutre 1 :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = 1 \times x = x.$$
7) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, \quad & x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)\\ & (y+z) \times x = (y \times x) + (z \times x).\end{aligned}$$
8) La multiplication est commutative :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \times y = y \times x.$$

$\mathbb{R}$ est un *anneau commutatif.*

9) 0 est différent de 1 et tout nombre réel x différent de 0 a un inverse pour la multiplication :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(x \neq 0 \Longrightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, \quad x \times y = y \times x = 1)\big).$$

Un tel inverse est unique (même démonstration que pour l'opposé pour l'addition) et on le note x^{-1}.

$\mathbb{R}$ est un *corps*. Comme autre corps, on connait le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels (les fractions), le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On utilise les notations habituelles pour la soustraction et la division : $x-y$ désigne $x+(-y)$ et x/y désigne $x\times y^{-1}$. On omet le plus souvent le symbole $\times$ pour écrire les multiplications.

10) $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$:

$$\begin{array}{rll} \forall x \in \mathbb{R}, & x \leq x & \text{(réflexivité)},\\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, & \big((x \leq y \ \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z\big) & \text{(transitivité)},\\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, & \big((x \leq y \ \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y\big) & \text{(antisymétrie)}. \end{array}$$

11) L'ordre $\leq$ est total :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \text{ ou } y \leq x).$$

12) L'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z).$$

13) Le produit de deux réels positifs ou nuls est positif ou nul :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \big((0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq xy\big).$$

Un corps muni en plus d'une relation d'ordre vérifiant les propriétés 10–13 est appelé un *corps totalement ordonné*. Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps totalement ordonnés.
A titre d'exemple, montrons en utilisant ces propriétés 12 et 13 que si $0 \leq c$ et $a \leq b$, alors $ac \leq bc$. En utilisant 12, on a $0 = a+(-a) \leq b-a$. En utilisant 13, on a $0 \leq c(b-a) = cb-ca$. Enfin, en utilisant de nouveau 12, $ca = 0 + ca \leq (cb-ca) + ca = cb$.

Exercice - 1°) Montrer que si un élément x d'un corps ordonné vérifie $x \leq 0$, alors $-x \geqslant 0$.
2°) Montrer que dans un corps ordonné un carré est positif ou nul. (Ecrire $x^2 = x\times x$ si $x \geqslant 0$ et $x^2 = (-x)\times(-x)$ si $x \leq 0$).
3°) Montrer qu'on ne peut pas définir d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui en fasse un corps ordonné. (En utilisant la question précédente montrer qu'on devrait avoir $0 \leq 1$ et $0 \leq -1$, et en déduire $0 = 1$).

On définit bien sûr la valeur absolue $|x|$ d'un élément x de $\mathbb{R}$ par $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. On rappelle la première inégalité triangulaire, très importante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Cette inégalité peut se démontrer à partir des axiomes de corps ordonnés.

Exercice - 1°) Démontrer (en utilisant les axiomes de corps ordonnés et les résultats déjà vus) l'inégalité dans le cas $x \geqslant 0$ et $y \leq 0$, en distinguant suivant les possibilités $x + y \geqslant 0$ ou $x + y \leq 0$.
2°) Dans quels cas la première inégalité triangulaire est-elle une égalité ?

A partir de la première inégalité triangulaire, on démontre la deuxième inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y|.$$

La démonstration se fait ainsi : on a $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$ par la première inégalité triangulaire, d'où $|x| - |y| \leq |x-y|$; de même $|y| \leq |y-x| + |x|$, d'où $|y| - |x| \leq |y-x|$. On en déduit la deuxième inégalité triangulaire.
Le plus gros du travail en analyse consiste à majorer, minorer, encadrer. Il est donc indispensable de savoir manipuler les inégalités.

Exercice - On suppose que $|x-1| \leq 2$ *et que* $-5 \leq y \leq -4$. *Encadrer les quantités suivantes :*

$$1)\ x+y \qquad 2)\ x-y \qquad 3)\ xy \qquad 4)\ \frac{x}{y} \qquad 5)\ |x|-|y|.$$

1.2. Axiome de la borne supérieure

Définition 7.1 – *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\mathbb{R}$. 1 – On dit que a est un majorant (respectivement un minorant) de A si, pour tout $x \in A$, $x \leq a$ (respectivement $x \geqslant a$).*
2 – On dit que A est majorée (respectivement minorée) si elle possède un majorant (respectivement un minorant).
3 – On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition 7.2 – *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on dit que A possède un plus grand (respectivement plus petit) élément s'il existe un élément* **appartenant à** *A qui majore (respectivement minore) A.*

Proposition 7.3 – *Si A possède un plus grand (respectivement plus petit) élément, celui-ci est unique.*

Exercice - 1°) Démontrer la proposition.
2°) Trouver des parties de $\mathbb{R}$ illustrant la définition de 'plus grand élément'.

Définition 7.4 – *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé borne supérieure de A et est noté $\sup A$.*

Exemple - 1 est la borne supérieure de $[0,1[$.

Proposition 7.5 – *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. $M = \sup A$ si, et seulement si,*

1) $\forall a \in A, \quad a \leq M$
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, \quad M-\varepsilon < b \leq M$.

On définit de manière analogue la borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$:

Définition 7.6 – *Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des minorants admet un plus grand élément, celui-ci est appelé borne inférieure de A et est noté $\inf A$.*

Exemple - 0 est la borne inférieure de $]0,1]$.

Proposition 7.7 – *Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$. $m = \inf A$ si, et seulement si,*

1) $\forall a \in A, \quad m \leq a$
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, \quad m \leq b < m+\varepsilon$.

On voit que, si A possède un plus grand élément, celui-ci est sa borne supérieure et, s'il possède un plus petit élément, celui-ci est sa borne inférieure. Les exemples donnés montrent que les bornes supérieure et inférieure **n'appartiennent pas forcément** à A.

Nous admettrons comme propriété essentielle de $\mathbb{R}$, l'énoncé suivant, appelé **axiome de la borne supérieure**

Tout partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Remarque - Dans l'énoncé la précision "non vide" est nécessaire, car pour tout réel M la proposition "$\forall x \in \emptyset, \quad x \leq M$" est vraie. Donc $\emptyset$ est majoré et pourtant l'ensemble des majorants, à savoir $\mathbb{R}$ n'admet pas de plus petit élément.
De cette propriété, on déduit aussitôt :

Tout partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

La démonstration est laissée en exercice.

Exercice - Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$, dire s'il a un plus grand élément, un plus petit élément, une borne inférieure, une borne supérieure :

$$1)\ \mathbb{N}\ , \qquad 2)\ [0,1[\ , \qquad 3)\ \{1+(1/n)\ ;\ n \in \mathbb{N},\ n>0\}.$$

De l'axiome de la borne supérieure, on déduit le fait que $\mathbb{R}$ est *un corps archimédien*, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon > x.$$

Démonstration : soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.
Supposons la proposition "$\exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon > x$" fausse ; cela signifie que sa négation est vraie donc que : "$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon \leq x$".
Notons $A_\varepsilon = \{n\varepsilon\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$; c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par x ;. Elle admet donc une borne supérieure M. Puisque $M - \varepsilon < M$, il existe $n_0\varepsilon \in A_\varepsilon$ tel que $M-\varepsilon < n_0\varepsilon \leq M$. Il en résulte que $M < (n_0+1)\varepsilon$. Or $n_0+1 \in \mathbb{N}$, donc on obtient une contradiction car $(n_0+1)\varepsilon \in A_\varepsilon$. □

Remarque - Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est également archimédien.

Exercice - 1°) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :
a) $(\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq x \leq \varepsilon) \Longrightarrow x = 0$;
b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \Longrightarrow x = 0.$
2°) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Montrer que :
a) $(\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq |x-y| \leq \varepsilon) \Longrightarrow x = y$;
b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq |x-y| \leq \frac{1}{n}) \Longrightarrow x = y.$

1.3. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (pour votre culture générale)

Définition 7.8 – *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, est égal au sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par*

$$\{r \in \mathbb{R} \,/\, \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \exists m \in \mathbb{Z}^*, \quad r = \frac{n}{m}\}.$$

Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés les nombres rationnels et ceux de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ les nombres irrationnels.

Exercice - Montrer que $\mathbb{Q}$ muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif totalement ordonné.

Définition 7.9 – *Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si*
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \qquad |x-a| < \varepsilon$

Remarque - Cette condition peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \qquad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

Proposition 7.10 – *Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$. Alors il existe un nombre rationnel r tel que $a < r < b$.*
Autrement dit, entre deux nombres réels il y a toujours un nombre rationnel.
Démonstration : si $a < 0 < b$, on fait $r = 0$. Si $a < b \leq 0$, on travaille avec les opposés : $0 \leq -b < -a$. On peut donc supposer $0 \leq a < b$. On choisit un entier $h > 0$ tel que $1/h < b-a$ (c'est possible car $\mathbb{R}$ est archimédien). Soit d le plus petit entier naturel d tel que $d/h > a$ (il y en a bien un , toujours grâce à l'archimédianité). Alors $(d-1)/h \leq a$ et donc

$$\frac{d}{h} = \frac{d-1}{h} + \frac{1}{h} \leq a + \frac{1}{h} < b\ .$$

Donc le nombre rationnel d/h vérifie bien $a < d/h < b$. □

Théorème 7.11 – $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.
Démonstration : il suffit d'appliquer la proposition précédente aux réels distincts $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$ □

Exercice - Montrer que $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel.*
On raisonne par l'absurde en posant $(p/q)^2 = 2$ *où* p *et* q *sont des entiers, et en comparant les puissances de 2 dans les diviseurs de* p^2 *et de* $2q^2$.

---

2. Suites de nombres réels

2.1. Suites convergentes

2.1.1. Définition d'une suite convergente

Définition 7.12 – *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. On dit que le nombre réel* ℓ *est limite de la suite* (a_n) *quand, pour tout nombre réel* ε *strictement positif, il existe un entier naturel* N*, tel que pour tout entier naturel* n *supérieur ou égal*
à N *on a* $|a_n - \ell| < \varepsilon$.
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *si et seulement si*

$$\left[\forall\varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon.)\right]$$

On dit qu'une suite de nombres réels est convergente quand elle a une limite dans $\mathbb{R}$.
On remarque que dans la définition de limite, seul compte ce qui se passe "à la fin" : si dans la suite (a_n) on modifie les k premiers termes, en remplaçant $a_0, \ldots, a_{k-1}$ par des réels quelconques $b_0, \ldots, b_{k-1}$, alors on ne change pas la nature de la suite (convergente ou non convergente), et si elle est convergente on ne change pas sa limite. En effet, on peut toujours prendre le N de la définition supérieur ou égal à k.
On s'autorisera donc de considérer des suites de nombres réels (a_n) qui ne sont bien définies que pour n supérieur à un certain entier. Par exemple, on parlera de la suite $(1/n)$ qui n'est définie que pour $n \geqslant 1$.
On dira qu'une suite (a_n) vérifie une propriété *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier N tel que la propriété soit vérifiée pour tout entier $n \geqslant N$.

Exercice - 1°) Montrer que l'on peut aussi exprimer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ *de la manière suivante :*

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

(on remplace $< \varepsilon$ *par* $\leq \varepsilon$*). Indication : si* $|a_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ *à partir du rang* N*, alors certainement* $|a_n - \ell| < \varepsilon$ *à partir du rang* N.
2°) Montrer, en utilisant la définition, que les suites suivantes convergent vers 0
$a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, $a_n = a^n$ *(où* $0 < a < 1$*).*
3°) Donner la définition d'une suite divergente.

2.1.2. Unicité de la limite

Proposition 7.13 – *Soit (a_n) une suite réelle, $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.*
Si (a_n) converge vers ℓ et (a_n) converge vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.
Démonstration : supposons $\ell \neq \ell'$. Soit $\varepsilon = |\ell - \ell'|/2$. On devrait avoir d'une part un entier naturel N_1 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N_1$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$, et d'autre part un entier naturel N_2 tel que pour tout entier $n \geqslant N_2$, $|a_n - \ell'| < \varepsilon$. Si l'on prend n supérieur à la fois à N_1 et à N_2, on devrait avoir

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - a_n| + |a_n - \ell'| < 2\varepsilon = |\ell - \ell'| \,.$$

On aboutit à une contradiction, donc une suite de nombres réels ne peut pas avoir plus d'une limite. □

On note alors $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ou simplement $\ell = \lim a_n$. On dit aussi que (a_n) *tend vers* ℓ (quand n tend vers l'infini).

Exercice - 1°) Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

a) $\lim a_n = \ell$ b) $\lim(a_n - \ell) = 0$ c) $\lim |a_n - \ell| = 0$.

2°) Montrer que si $\lim a_n = \ell$, alors $\lim |a_n| = |\ell|$. (La deuxième inégalité triangulaire sert !)

Pour étudier une suite, on se ramène souvent à une suite tendant vers 0. Le critère suivant est très utile.

Proposition 7.14 – *Soit (a_n) une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. S'il existe une suite (u_n) de nombres réels positifs tels que $|a_n - \ell| \leq u_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.*

Démonstration : donnons nous un réel $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on a $u_n = |u_n - 0| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Comme $|a_n - \ell| \leq u_n$ à partir d'un certain rang, on a aussi $|a_n - \ell| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang et ceci montre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. □

Pour utiliser le critère précédent, il faut avoir à sa disposition un certain nombre de suites tendant vers 0 (des "suites de référence"). Nous allons pouvoir construire de telles suites en utilisant le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien .

Proposition 7.15 – *Soit a un nombre réel positif.*

i) La suite $(a/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.
ii) Si k est un entier positif, la suite $(a/n^k)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.
iii) Si r est un nombre réel positif strictement plus petit que 1, la suite $(a\,r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Démonstration : (i) Donnons nous $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel N tel que $N\varepsilon > a$. Donc pour tout entier $n \geqslant N$, on a $|a/n - 0| = a/n < \varepsilon$.
(ii) Si k est un entier positif et $n \geqslant 1$, on a $n^{k-1} \geqslant 1$ et donc $n^k = n \times n^{k-1} \geqslant n$. On a donc $|a/n^k - 0| = a/n^k \leq a/n$ pour $n \geqslant 1$, et donc d'après (i) et la proposition 7.14 la limite de (a/n^k) est 0.
(iii) Si $r < 1$, alors $1/r > 1$ et on a pour $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}\right)^n &= \left(1 + (\frac{1}{r} - 1)\right)^n \\ &= 1 + n(\frac{1}{r} - 1) + \mathbf{C}_n^2(\frac{1}{r} - 1)^2 + \cdots + \mathbf{C}_n^{n-1}(\frac{1}{r} - 1)^{n-1} + (\frac{1}{r} - 1)^n \\ &\geqslant n(\frac{1}{r} - 1) \text{ car tous les termes de la somme sont positifs.}\end{aligned}$$

Donc pour $n \geqslant 1$ on a $|a\,r^n - 0| = a\,r^n \leq a\frac{r}{n(1-r)}$. D'après (i) et la proposition 7.14 on en déduit que la limite de $(a\,r^n)$ est 0. □

2.1.3. Limites et inégalités

Définition 7.16 – *Soit (a_n) une suite de nombres réels.*
On dit que M est un majorant de la suite (a_n) si $a_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On dit que m est un minorant de la suite (a_n) si $m \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On dit que la suite (a_n) est majorée (resp. est minorée) si elle a un majorant (resp. un minorant). On dit qu'elle est bornée si elle a à la fois un majorant et un minorant.

Exercice - Montrer que la suite (a_n) est bornée si et seulement s'il existe un réel $A > 0$ tel que $|a_n| \leq A$ pour tout n.

Proposition 7.17 – *Soit (a_n) une suite convergente de nombres réels. Alors il existe un réel $A > 0$ tel que $|a_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, une suite convergente de nombres réels est bornée.*
Démonstration : posons $\lim a_n = \ell$. Il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|a_n - \ell| < 1$. On en déduit, pour tout $n \geqslant N$, $|a_n| < 1 + |\ell|$. Si l'on pose

$$A = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |\ell|) \ ,$$

on a bien $|a_n| \leq A$ pour tout n. □

Proposition 7.18 – *Soit (a_n) une suite convergente vers ℓ, et b un nombre réel. Si $\ell > b$ (respectivement $\ell < b$), alors il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $a_n > b$ (resp. $a_n < b$).*
On dit aussi que, même pour un ε petit, a_n sera plus grand que $\ell - \varepsilon$ à partir d'un certain rang.
Démonstration : soit $\ell = \lim a_n$, et $\varepsilon = \ell - b > 0$. Il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|a_n - \ell| < \varepsilon$, et donc $a_n > b$. □

Théorème 7.19 – *[Passage à la limite dans les inégalités] Soit (a_n) une suite convergente, et b un nombre réel. Si pour tout entier naturel N il existe un entier $n \geqslant N$ tel que $a_n \leq b$ (respectivement $a_n \geqslant b$), alors $\lim a_n \leq b$ (resp. $\lim a_n \geqslant b$). En particulier si on a $a_n \leq b$ (resp. $a_n \geqslant b$) à partir d'un certain rang, alors $\lim a_n \leq b$ (resp. $\lim a_n \geqslant b$).*
Démonstration : c'est la contraposée de la proposition 7.18. En formule, cette proposition s'écrit

$$(\lim a_n > b) \Longrightarrow (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad a_n > b).$$

La contraposée, qui lui est équivalente, s'écrit

$$\text{non } (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad a_n > b) \Longrightarrow \text{ non } (\lim a_n > b) \ .$$

Ceci équivaut à

$$(\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \quad a_n \leq b) \Longrightarrow (\lim a_n \leq b),$$

qui est bien la formulation du théorème. □

2.1.4. Opérations sur les suites

Théorème 7.20 – *Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes de nombres réels. Alors*
1) La suite $(a_n + b_n)$ est convergente et $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
2) Soit λ un nombre réel quelconque. La suite (λa_n) est convergente et $\lim(\lambda a_n) = \lambda \lim a_n$.
3) La suite $(a_n b_n)$ est convergente et $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \times \lim b_n$.

Démonstration : on pose $\ell = \lim a_n$ et $m = \lim b_n$.
Pour 1, on veut rendre $|(a_n + b_n) - (\ell + m)|$ plus petit qu'un nombre réel $\varepsilon > 0$ donné. Or on a $|(a_n + b_n) - (\ell + m)| \leq |a_n - \ell| + |b_n - m|$. On sait que $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$ à partir d'un certain rang et que $|b_n - m| < \varepsilon/2$ à partir d'un certain rang. Donc $|(a_n + b_n) - (\ell + m)| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Ceci montre que $\lim(a_n + b_n) = \ell + m$.

Le 2 est facile (le traiter en exercice).
Voyons maintenant 3. On suppose d'abord que $\ell = 0$. On veut montrer que $\lim(a_n b_n) = 0 \times m = 0$. Puisque la suite (b_n) est convergente, elle est bornée (Proposition 7.17) et il existe un nombre réel $B > 0$ tel que, pour tout n, on a $|b_n| \leq B$. On obtient $|a_n b_n| \leq B|a_n|$. Puisque $\lim a_n = 0$ on a $\lim |a_n| = 0$ et, d'après 2, $\lim(B\,|a_n|) = 0$. Par la proposition 7.14 on en déduit $\lim(a_n b_n) = 0$.
Il nous reste à voir ce qui se passe dans le cas général. On a alors $a_n b_n = \ell b_n + (a_n - \ell) b_n$. Comme $\lim(a_n - \ell) = 0$, on sait d'après le cas particulier que l'on vient de traiter que $\lim\big((a_n - \ell)b_n\big) = 0$. D'après 2 on a $\lim(\ell b_n) = \ell m$. En appliquant 1, il vient $\lim(a_n b_n) = \ell m + 0 = \ell m$. □

Proposition 7.21 – *Soit (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites de nombres réels. Si $\lim a_n = \lim b_n = \ell$ et si on a $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang (u_n est encadré par les deux gendarmes a_n et b_n), alors $\lim u_n = \ell$.*

Exercice - Démontrer la "propriété des gendarmes" énoncée ci-dessus. On utilisera l'inégalité $|u_n - a_n| \leq (b_n - a_n)$ valide à partir d'un certain rang, le théorème 7.20 *et la proposition* 7.14.

Proposition 7.22 – *[Limite d'un quotient] Soit (a_n) une suite convergente de nombres réels, et supposons que $\ell = \lim a_n$ est non nul. Alors à partir d'un certain rang on a $a_n \neq 0$, et $\lim(1/a_n) = 1/\ell$.*
Démonstration : on sait que $\lim |a_n| = |\ell| > 0$. D'après la proposition 7.18, on a $|a_n| > |\ell|/2$ à partir d'un certain rang, et a fortiori $a_n \neq 0$.
Etant donné $\varepsilon > 0$, on veut rendre $|1/a_n - 1/\ell|$ plus petit que ε. On a

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - a_n}{a_n \ell}\right| = \frac{|a_n - \ell|}{|a_n|\,|\ell|}.$$

On sait déjà que $|a_n| > |\ell|/2$ à partir d'un certain rang. On sait aussi que $|a_n - \ell| < \varepsilon \ell^2/2$ à partir d'un certain rang. Donc

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{\varepsilon \ell^2/2}{(|\ell|/2)|\ell|} = \varepsilon$$

à partir d'un certain rang. C'est ce que l'on voulait. □

En combinant le 3 du théorème 7.20 et la proposition 7.22, on obtient que si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = m \neq 0$, alors $\lim(u_n/v_n) = \ell/m$.

2.2. Suites croissantes

Une suite (a_n) est croissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \qquad (n \leq m \Longrightarrow u_n \leq u_m).$$

Une suite (a_n) est majorée si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

Théorème 7.23 – *Toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente.*
Démonstration : soit (a_n) une suite de nombres réels croissante et majorée.
Posons $A = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Comme la suite (a_n) est majorée, le sous-ensemble (non vide) A est aussi majoré et admet donc une borne supérieure que nous noterons ℓ. Montrons que $\ell = \lim a_n$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier naturel n tel que $\ell - \varepsilon < a_n < \ell$. Comme a_n est croissante pour tout entier m tel que $m \geqslant n$ on a $a_n \leq a_m$ et par définition de ℓ on a $u_m \leq \ell$. On a donc $\ell - \varepsilon < a_n \leq a_m \leq \ell < \ell + \varepsilon$. On a bien montré que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \qquad (m \geqslant n \Longrightarrow |a_m - \ell| < \varepsilon)$. □

Corollaire 7.24 – *Si (a_n) est une suite de nombres réels croissante et majorée, alors*

$$\lim a_n = sup\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

Corollaire 7.25 – *Si (a_n) est une suite de nombres réels décroissante et minorée, alors (a_n) converge et*

$$\lim a_n = inf\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

Exercice - Démontrer les corollaires.

Remarque - Ce théorème est faux si l'on remplace réel par rationnel.(Donner un contre-exemple)

Exercice - (difficile) Soit (u_n) une suite de nombres réels. On définit les suites (v_n) et (w_n) par

$$v_n = sup\{u_m ; m \geqslant n\}$$
$$w_n = inf\{u_m ; m \geqslant n\}$$

1°) Montrer que (v_n) est décroissante et que (w_n) est croissante.
2°) Montrer que (v_n) et (w_n) sont convergentes et que $\lim v_n \geqslant \lim w_n$.
On appelle **limite supérieure** *de (u_n) et on note $\limsup u_n$ la limite de (v_n), de même on appelle* **limite inférieure** *et on note $\liminf u_n$ la limite de (w_n).*
3°) Montrer que si $\limsup u_n = \liminf u_n$, alors (u_n) converge et
$\lim u_n = \limsup u_n = \liminf u_n$.

2.3. Suites adjacentes

Définition 7.26 – *Deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels sont dites adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :*

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq b_n$,
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1}$ *(la suite (a_n) est croissante),*
3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \geqslant b_{n+1}$ *(la suite (b_n) est décroissante),*
4) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Exemple - Les suites de décimaux à 10^{-n} près par défaut et par excès d'un nombre réel x, $a_n = E(10^n x)$ et $b_n = E(1 + 10^n x)$, sont des suites adjacentes et convergent vers x.

Remarque - Le premier item est en fait une conséquence des trois autres : posons $c_n = a_n - b_n$. La suite (c_n) converge vers 0 d'après l'item 3 ; elle est croissante car $a_{n+1} - b_{n+1} \geqslant a_n - b_n$ car (a_n) croit et (b_n) décroit. On en déduit qu'elle est négative donc, pour tout entier n, $a_n \leq b_n$.

Proposition 7.27 – *Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes de nombres réels. Alors il existe un unique nombre réel c tel que $a_n \leq c \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.*

Démonstration : comme (b_n) est décroissante et $(a_n) \leq b_n$, on a pour tout n, $a_n \leq b_0$. La suite (a_n) est croissante et majorée et donc convergente. Puisque $\lim b_n - a_n = 0$, on a $\lim b_n = \lim(b_n - a_n) + \lim a_n = \lim a_n$. □

Donnons un premier exemple de nombre réel défini par deux suites adjacentes. Nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 7.28 – *Tout nombre réel positif ou nul a une racine carrée dans $\mathbb{R}$.*

Rappelons notre règle du jeu, qui est de ne rien accepter sur les réels que ce qui découle logiquement des axiomes que l'on a posés. On n'a rien dit dans ces axiomes de l'existence de racines carrées, donc il faut bien montrer à partir des axiomes que la racine carrée d'un réel positif ou nul existe !

Démonstration : soit r un nombre réel, $0 \leq r$. On va définir par récurrence une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$, par un procédé que nous reverrons plusieurs fois : la *dichotomie* ("action de couper en deux"). On veut que pour tout entier n, l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$(a_n)^2 \leq r < (b_n)^2 \ .$$

Pour le choix du premier segment, on procède de la manière suivante : on définit b_0 comme étant le plus petit entier naturel qui vérifie $r < (b_0)^2$. D'après l'axiome d'archimédianité il y a des entiers naturels p plus grands que r, et un tel p vérifie $p^2 \geqslant p > r$. Puisqu'il y a des entiers dont le carré est strictement plus grand que r, on peut bien prendre le plus petit de ces entiers. On pose $a_0 = b_0 - 1$. Comme $b_0 \geqslant 1$, on a $a_0 \geqslant 0$. Par définition de b_0, on a $(a_0)^2 \leq r < (b_0)^2$.

Supposons maintenant que l'on a déjà construit le segment $[a_n, b_n]$ vérifiant l'inégalité $(a_n)^2 \leq r < (b_n)^2$. Alors

a) Si $\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)^2 \leq r$, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ (on garde la moitié droite du segment).

b) Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ (on garde la moitié gauche).

Le choix de la moitié du segment que l'on garde s'est fait de telle manière que l'on ait bien $(a_{n+1})^2 \leq r < (b_{n+1})^2$. La dichotomie consiste à couper le segment en deux à chaque étape. Comme la longueur du segment $[a_0, b_0]$ est 1, celle du segment $[a_n, b_n]$ vaut $1/2^n$. Cette longueur tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on l'a vu dans la proposition 7.15 (iii). Donc, d'après la proposition 7.27, il existe un et un seul réel ℓ qui vérifie $a_n \leq \ell \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $0 \leq a_0 \leq \ell$. Pour voir que ℓ est la racine carrée de r, il reste à vérifier que $\ell^2 = r$.

Comme $\lim a_n = \lim b_n = \ell$, on a, d'après le 3 du théorème 7.20, $\lim(a_n)^2 = \lim(b_n)^2 = \ell^2$. Des inégalités $(a_n)^2 \leq r < (b_n)^2$ on déduit par passage à la limite (Théorème 7.19) que

$$\ell^2 = \lim(a_n)^2 \leq r \leq \lim(b_n)^2 = \ell^2 \ ,$$

et donc $\ell^2 = r$. □

2.4. Limites infinies

Il est commode d'étendre la définition de limite pour englober des limites infinies.

Définition 7.29 – *On dit qu'une suite de nombres réels (a_n) a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, pour tout nombre réel A, il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on a $A < a_n$ (resp. $a_n < A$) :*

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad A < a_n .$$

Autrement dit, (a_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $a_n > A$ à partir d'un certain rang.

Attention : une suite (a_n) qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ *n'est pas appelée suite convergente.*

Exercice - 1°) Montrer que l'on peut aussi exprimer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *par*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad A \leq a_n .$$

2°)) Montrer que si $\lim a_n = +\infty$ *et* $b_n \geqslant a_n$ *à partir d'un certain rang, alors* $\lim b_n = +\infty$.

Proposition 7.30 – *Les résultats concernant les limites de sommes et de produits de suites de nombres réels (théorème* 7.20*) s'étendent aux limites infinies, dans les cas correspondant aux égalités suivantes :*

$$\begin{array}{rlrl} \ell + (+\infty) &= +\infty & \ell + (-\infty) &= -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty \\ \ell \times (+\infty) &= \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0 \\ -\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases} & \ell \times (-\infty) &= \begin{cases} -\infty \text{ si } \ell > 0 \\ +\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases} \\ (+\infty) \times (-\infty) &= -\infty & (+\infty) \times (+\infty) &= (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \end{array}$$

Les cas "indéterminés" sont $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$ *et* $0 \times (-\infty)$.

Démonstration : on se limitera à un cas : si $\lim a_n = \ell > 0$ et $\lim b_n = +\infty$, alors $\lim a_n b_n = +\infty$. On se donne un réel A et on veut rendre $a_n b_n$ strictement plus grand que A. On peut supposer $A > 0$. Puisque $\lim a_n > \ell/2$, on a $a_n > \ell/2$ à partir d'un certain rang. Par ailleurs, on a $b_n > 2A/\ell$ à partir d'un certain rang. Donc $a_n b_n > A$ à partir d'un certain rang. On a bien montré $\lim a_n b_n = +\infty$. □

Exercice - Essayez de voir comment procéder dans un ou deux autres cas.

Proposition 7.31 – *Si* (a_n) *est une suite de nombres réels telle que* $\lim |a_n| = +\infty$*, alors* $a_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang et* $\lim 1/a_n = 0$*. Si* (a_n) *est une suite de nombres réels strictement positifs à partir d'un certain rang telle que* $\lim a_n = 0$*, alors* $\lim 1/a_n = +\infty$

Exercice - Faire la démonstration.

2.5. Suites extraites

Une suite extraite de la suite (u_n) est une suite obtenue en enlevant certains des termes de (u_n), sans changer l'ordre. Pour pouvoir raisonner sur cette notion de suite extraite, il nous faut une définition plus en forme.

Définition 7.32 – *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels. On dit que la suite* (v_n) *est extraite de la suite* (u_n) *s'il existe une application strictement croissante* φ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *(*$m < n$ *entraîne* $\varphi(m) < \varphi(n)$*) telle que* $v_n = u_{\varphi(n)}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exemples - • La suite des termes de rang pair $v_n = u_{2n}$ et celle des termes de rang impair $w_n = u_{2n+1}$ sont extraites de la suite (u_n) ; la suite $v_n = 1/(4n^4)$ est extraite de la suite $u_n = 1/n^2$, au moyen de l'application $\varphi(n) = 2n^2$.
• La suite $t_n = \frac{\cos(1)}{4n+1}$ est extraite de la suite $u_n = \frac{1}{n}\sin(1 + n\frac{\pi}{2})$.
En effet, $t_n = u_{4n+1}$.

Lemme 7.33 – *Soit* φ *une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*. Alors, pour tout entier naturel* n*, on a* $n \leq \varphi(n)$.

Exercice - Démontrer le lemme en utilisant un raisonnement par récurrence.

Proposition 7.34 – *Soit* (u_n) *une suite convergente de nombres réels, et soit* (v_n) *une suite extraite de* (u_n)*. Alors la suite* (v_n) *est convergente et* $\lim v_n = \lim u_n$.

Démonstration : donnons nous $\varepsilon > 0$. On a un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. On suppose que $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est strictement croissante. On a toujours $\varphi(n) \geqslant n$ d'après le lemme 7.33. Donc, si $n \geqslant N$, alors $\varphi(n) \geqslant N$, d'où $|v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Ceci montre que $\lim v_n = \ell$. □

2.6. Développement décimal

Nous allons voir maintenant un exemple important, d'encadrement d'un nombre réel par des suites adjacentes de nombres rationnels : le *développement décimal*.
Soit ℓ un réel positif ou nul. On note $E(\ell)$ sa partie entière, c'est à dire l'entier naturel tel que $E(\ell) \leq \ell < E(\ell)+1$. L'existence de cette partie entière est assurée par le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien : cet axiome entraîne qu'il y a des entiers naturels strictement plus grands que ℓ, donc on peut prendre le plus petit entier p tel que $p > \ell$ et on pose $E(\ell) = p - 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 10^{-n}E(10^n x)$. On a alors $0 \leq x - x_n < 10^{-n}$ car $10^n x_n = E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$ par définition de la partie entière.

Définition 7.35 – *On dit que x_n est l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.*

Proposition 7.36 – $x = \lim x_n$

Posons $a_n = E(10^n x) - 10\,E(10^{n-1}x) = 10^n(x_n - x_{n-1})$.

Lemme 7.37 – *a_n est un entier compris entre 0 et 9.*

Démonstration : a_n est, par définition de la partie entière, un entier.
On a $E(10^{n-1}x) \leq 10^{n-1}x < E(10^{n-1}x)+1$, d'où $10E(10^{n-1}x) \leq 10^n x < 10E(10^{n-1}x)+10$ et, par définition de $E(10^n x)$, on obtient

$$10E(10^{n-1}x) \leq E(10^n x) < E(10^n x) + 1 \leq 10E(10^{n-1}x) + 10.$$

On en déduit que

$$0 \leq E(10^n x) - 10\,E(10^{n-1}x) < 10.$$

□

On a de plus

$$\begin{array}{ll}
a_n = 10^n(x_n - x_{n-1}) & 10^{-n}a_n = x_n - x_{n-1} \\
a_{n-1} = 10^{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) & 10^{-(n-1)}a_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} \\
\cdots & \cdots \\
a_1 = 10(x_1 - x_0) & 10^{-1}a_1 = x_1 - x_0)
\end{array}$$

En additionnant, on obtient $x_n = x_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$ où $x_0 = E(x)$.

On note $x = x_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i} = x_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ et on appelle cette écriture le développement décimal propre illimité de x.
On admet la réciproque, c'est-à-dire qu'un développement décimal illimité représente un réel et que deux développements décimaux illimités peuvent représenter le même réel. Ce résultat est démontré en deuxième année de DEUG au moment de l'étude des séries.

Exemple - $1 = 0,99999\ldots$ et $0,356 = 0,355999999\ldots$.

Pour $x < 0$, on utilise le développement décimal propre illimité de $-x = x_0, a_1 a_2 \cdots$ puis $x = -x_0, a_1 a_2 \cdots$. Dans ce cas, $E(x) = -x_0 - 1$.

Théorème 7.38 – *Un rationnel admet un développement décimal illimité qui est périodique à partir d'un certain rang.*

La preuve se fait au moyen de la division euclidienne.
On admet la réciproque, c'est-à-dire que
Tout réel admettant un développement décimal illimité périodique à partir d'un certain rang est un rationnel.

Exemple -

$$x = 3,46\underbrace{53}\underbrace{53}\cdots = 3 + \frac{46}{100} + \frac{53}{900} = \frac{3167}{900}$$

$$x = 1,\underbrace{714285}\underbrace{714285}\cdots = \frac{12}{7}$$

Remarque - Le développement décimal d'un réel est unique si l'on suppose de plus que $\{a_n\,;\,a_n < 9\}$ est infini (ce qui revient à écarter le cas d'une suite qui devient constante égale à 9).

3. Pour approfondir le sujet

3.1. Critère de Cauchy, théorème de Bolzano-Weierstrass

3.1.1. Critère de Cauchy

Définition 7.39 – *Une suite (u_n) de nombres réels est dite suite de Cauchy quand elle vérifie la propriété suivante : pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N, tel que pour tous $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$, on a $|u_q - u_p| < \varepsilon$.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Autrement dit, pour toute "tolérance" ε, on peut trouver un rang N à partir duquel l'écart entre deux termes quelconques de la suite est plus petit que ε. Il faut bien voir qu'on ne se contente pas de l'écart de deux termes successifs ! Par exemple posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = 1 + (1/2) + \cdots + (1/n)$. On a $|u_n - u_{n+1}| = 1/(n+1)$; donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon$. Cependant, notre suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy. En effet si c'était une suite de Cauchy , en prenant $\varepsilon = 1/2$, on devrait trouver N tel que quels que soient $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$, on ait $|u_n - u_p| < 1/2$. En particulier, on devrait avoir $|u_N - u_{2N}| < 1/2$. Or

$$|u_N - u_{2N}| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \times \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Théorème 7.40 – *[Critère de Cauchy] Une suite de nombres réels est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Démonstration : soit (u_n) une suite convergente, et $\ell = \lim u_n$. Donnons nous $\varepsilon > 0$. On veut rendre $|u_n - u_p|$ plus petit que ε, or on sait que $|u_n - u_p| \leq |\ell - u_n| + |\ell - u_p|$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $|\ell - u_n| < \varepsilon/2$. Donc, si l'on prend $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$, on a $|u_n - u_p| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. La suite (u_n) est donc de Cauchy.

Réciproquement, supposons que la suite (u_n) est de Cauchy. On commence par montrer qu'elle est bornée. Il existe N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$ et tout $p \geqslant N_1$, on a $|u_n - u_p| < 1$. En particulier (avec $p = N_1$), on obtient que pour tout $n \geqslant N_1$ on a $|u_n| \leq |u_{N_1}| + 1$. Si on pose $A = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N_1 - 1}|, |u_{N_1}| + 1)$, alors $|u_n| \leq A$ quel que soit n.

On va construire deux suites adjacentes. Pour tout choix de $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble non vide $A_n = \{u_k\,;\,k \geqslant n\}$ est majoré par A et minoré par $-A$. Soit $a_n = \inf\{u_k; k \geqslant n\}$ et $b_n = \sup\{u_k; k \geqslant n\}$.

Comme $A_{n+1} \subset A_n$ alors $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

Il reste à montrer que $\lim(b_n - a_n) = 0$.

Donnons nous $\varepsilon > 0$.

Comme $a_n = \inf\{u_k; k \geqslant n\}$, il existe un entier $p \geqslant n$ tel que $a_n \leq u_p < a_n + \frac{\varepsilon}{3}$. De même $b_n = \sup\{u_k; k \geqslant n\}$, il existe un entier $q \geqslant n$ tel que $b_n - \frac{\varepsilon}{3} < u_q \leq b_n$.

D'autre part, comme u_n est une suite de Cauchy, il existe un entier N tel que pour tout $p \geqslant N$ et tout $q \geqslant N$ on a $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{3}$.

A l'aide de l'inégalité triangulaire, $|b_n - a_n| = |(b_n - u_q) + (u_q - u_p) + (u_p - a_n)| \leq |b_n - u_q| + |u_q - u_p| + |u_p - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$.

On a montré que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc convergent vers une même limite.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$, d'où u_n est convergente. $\square$

L'intérêt du critère de Cauchy est surtout théorique. Il réside dans le fait que ce critère permet de caractériser les suites convergentes sans faire intervenir leurs limites.

3.1.2. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 7.41 – *[Bolzano-Weierstrass] Soit (u_n) une suite bornée de nombres réels. Alors on peut extraire de la suite (u_n) une suite (v_n) qui converge.*

Démonstration : par hypothèse il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout n, on a $|u_n| \leq M$. On construit alors par dichotomie une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ tels que, pour tout n, il y a une infinité d'entiers p pour lesquels u_p est dans $[a_n, b_n]$. En même temps, on construit une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$

On pose $a_0 = -M$ et $b_0 = M$. Tous les u_p sont dans $[a_0, b_0]$, il y a donc bien une infinité de p pour lesquels c'est vrai. On pose $\varphi(0) = 0$, on a bien $u_{\varphi(0)} \in [a_0, b_0]$.

Supposons que l'on a déjà construit $[a_n, b_n]$, qu'il y a une infinité de p pour lesquels u_p est dans $[a_n, b_n]$, et que l'on a défini $\varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$. Si le segment $[a_n, (a_n + b_n)/2]$ est tel qu'il y a une infinité de p pour lesquels u_p est dans $[a_n, b_n]$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$. Sinon, il doit y avoir une infinité de p pour lesquels u_p est dans le segment $[(a_n + b_n)/2, b_n]$, et alors on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans les deux cas, comme il y a une infinité de p tels que $u_p \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, il y en a des plus grands que $\varphi(n)$ et donc on peut choisir $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

On construit ainsi par récurrence une suite de segments emboîtés et une fonction φ avec la propriété annoncée. La longueur du segment $[a_n, b_n]$ est $2M/2^n$; elle tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il y a donc un unique réel c qui appartient à tous les segments $[a_n, b_n]$. Ce nombre c est la limite commune des suites adjacentes (a_n) et (b_n).

On extrait maintenant une suite (v_n) de la suite (u_n) en posant $v_n = u_{\varphi(n)}$, et ainsi on a $a_n \leq v_n \leq b_n$ pour tout n. La suite (v_n) est encadrée entre les deux “gendarmes” (a_n) et (b_n) qui tendent vers c, et donc d'après 7.27 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = c$. $\square$

3.2. Combien y a-t-il de nombres réels ? (pour votre culture générale)

La question peut sembler farfelue. On va la préciser. Si A et B sont des ensembles finis, le nombre d'éléments de A est supérieur ou égal au nombre d'éléments de B si et seulement s'il existe une surjection de A sur B (une application de A dans B pour laquelle chaque élément de B est atteint). Une image : le nombre de lapins est supérieur ou égal au nombre de cages si et seulement s'il existe une manière de mettre les lapins en cage de telle sorte que chaque cage soit occupée. Pour des ensembles infinis, on ne parle plus de nombre d'éléments mais de *cardinal*, et on dit que le cardinal d'un ensemble A est supérieur ou égal au cardinal de B quand il existe une surjection de A sur B.

Définition 7.42 – *Un ensemble dénombrable est un ensemble infini A pour lequel il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A .*

Autrement dit, on peut énumérer A, c'est à dire faire une liste de ses éléments, éventuellement avec répétition.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable. Voici un début d'énumération :

$$0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \dots$$

Exercice - Pouvez-vous continuer, et décrire comment est fabriquée cette énumération ?

Tout nombre rationnel figure dans la liste ; il y a des répétitions. L'ordre dans la liste n'a rien à voir avec l'ordre sur $\mathbb{Q}$.

Par contre :

Proposition 7.43 – *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration : si on avait une énumération de $\mathbb{R}$, on aurait une énumération de l'intervalle $[0,1[$, en jetant de la liste tous les autres réels. Cette énumération serait une liste de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ dont on écrit les développements décimaux (avec l'hypothèse que la suite $(i_{p,n})_n$ ne devienne pas constante égale à 9 pour avoir l'unicité du développement) :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, i_{1,1} i_{1,2} i_{1,3} \ldots \\ \alpha_2 &= 0, i_{2,1} i_{2,2} i_{2,3} \ldots \\ \alpha_3 &= 0, i_{3,1} i_{3,2} i_{3,3} \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tout réel de $[0,1[$ devrait figurer dans cette liste. Or, voici comment en fabriquer un qui n'y figure pas : pour tout $n \geqslant 1$, on pose $j_n = 0$ si $i_{n,n} \neq 0$ et $j_n = 1$ si $i_{n,n} = 0$. On construit bien ainsi le développement décimal du réel $\ell = 0, j_1 j_2 j_3 \ldots$, ce développement ne se termine pas par des termes égaux à 9 par construction et ce réel ℓ ne figure pas dans la liste. En effet si on avait $\ell = \alpha_n$, alors les développements décimaux devraient coïncider et on aurait $j_n = i_{n,n}$, ce qui est faux. □

L'argument que l'on vient d'employer s'appelle argument diagonal de Cantor. Georg Cantor (1845–1918) a été élève de Weierstrass à Berlin. A la suite de recherches fines d'analyse, il a été amené à étudier et à comparer des ensembles infinis. Il introduisit à cet effet de nouveaux concepts qui constituaient une véritable "arithmétique de l'infini".

3.3. A propos de la construction des nombres réels (pour votre culture générale)

Le problème est le suivant : on veut dire ce qu'est l'ensemble des nombres réels, en supposant connu l'ensemble des nombres rationnels. Autrement dit, on veut "construire" les nombres réels à partir des nombres rationnels, comme on sait construire les nombres rationnels à partir des nombres entiers, ou les nombres complexes à partir des nombres réels. L'idée de la construction est donnée par des propriétés que nous avons établies à partir des axiomes : tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels, et une suite a une limite dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy. Un nombre réel sera représenté par une suite de Cauchy de nombres rationnels, et deux suites de Cauchy de nombres rationnels représenteront le même réel si et seulement si leur différence tend vers 0.
Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites de Cauchy de nombres rationnels, c'est à dire l'ensemble des suites (a_n) telles que tous les a_n sont des nombres rationnels, et que pour tout rationnel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tous $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$ on a $|a_n - a_p| < \varepsilon$. Sur cet ensemble $\mathcal{S}$, on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en disant que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation $\mathcal{R}$ quand pour tout rationnel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $|a_n - b_n| < \varepsilon$. Alors on définit $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $\mathcal{S}$ pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Cette définition est bien faite entièrement à partir des nombres rationnels.
Il reste bien sûr à définir les opérations et l'ordre sur $\mathbb{R}$, puis à vérifier les propriétés que l'on avait posées comme axiomes au début de ce chapitre. Par exemple, la somme du réel représenté par la suite (a_n) de $\mathcal{S}$ et du réel représenté par la suite (b_n) de $\mathcal{S}$ sera bien sûr le réel représenté par la suite $(a_n + b_n)$. On voit qu'il y a des vérifications à faire : que la suite $(a_n + b_n)$ est bien de Cauchy, et que si on remplace (a_n) et (b_n) par des suites (a'_n) et (b'_n) équivalentes dans $\mathcal{S}$, alors $(a'_n + b'_n)$ est équivalente à $(a_n + b_n)$. Ces vérifications des propriétés des opérations et de l'ordre ne sont pas très compliquées, mais fastidieuses.

Bernard Bolzano (1781–1848), Augustin Louis Cauchy (1789–1857), Karl Weierstrass (1815–1897) : trois mathématiciens qui ont contribué de façon essentielle, au cours du 19ème siècle, à la construction de la théorie des nombres réels qui fonde l'analyse moderne. Cauchy et Weierstrass ont eu une influence importante par leur enseignement, le premier à l'Ecole Polytechnique et le deuxième à l'Université de Berlin.