Chapitre 3

Eléments pour comprendre et écrire des démonstrations

Une des tâches essentielles en mathématique est de chercher à s'assurer que telle ou telle proposition est vraie ou fausse. Il ne suffit pas de bien la comprendre pour cela. Par exemple, Pierre de Fermat a énoncé vers 1640 le théorème qui porte son nom depuis : "si n est un entier strictement supérieur à 2, il n'existe pas d'entiers non nuls a, b, c tels que $a^n + b^n = c^n$". Le sens de cet énoncé est parfaitement clair, mais il a cependant fallu attendre plus de trois siècles pour être sûr qu'il était vrai, grâce à la démonstration d'Andrew Wiles (1994).
Pour s'assurer de la vérité d'une proposition, les mathématiciens écrivent des textes spécifiques, appelés *démonstrations*. Ces textes sont souvent complexes, ce qui explique que de nombreuses erreurs soient commises par les débutants. Ils mettent en oeuvre un certain nombre de règles dont la connaissance est le plus souvent seulement implicite, ce qui rend la compréhension et la correction de ses erreurs difficiles. Ils s'articulent autour de la distinction entre *propositions données* (encore appelées *hypothèses*) et *propositions à démontrer*, qui n'est pas toujours clairement perçue.
Tout ceci explique qu'il soit difficile d'apprendre à rédiger soi-même une démonstration. L'objet de ce chapitre est de vous y aider. Pour cela, on va d'abord donner quelques éléments pour mieux comprendre la structure des démonstrations. Puis, on donnera quelques stratégies pour trouver une démonstration, des exemples de problèmes à résoudre et enfin quelques conseils de rédaction.

1. Pour comprendre la structure d'une démonstration

Quand on rédige une démonstration, la proposition que l'on cherche à démontrer s'appelle la *conclusion*. Au cours de la démonstration, on utilise des résultats déjà connus, par exemple, des définitions, des théorèmes ou des propositions déjà démontrés dans le cours ; mais aussi les prémices offerts par l'énoncé ou des résultats intermédiaires que l'on a obtenus préalablement. Toutes ces propositions s'appellent des *données*.
Une des raisons de la complexité des démonstrations est que l'on peut être amené pendant la démonstration à ajouter provisoirement de nouvelles données qui ne font pas partie de celles dont nous venons de parler et aussi de nouveaux objets qui ne sont pas décrits dans l'énoncé. Leur introduction est signalée par des expressions comme "Supposons que ...", "Soit ...", "Considérons...".
Il faut aussi noter qu'une démonstration ne contient pas que des propositions vraies. L'exemple le plus évident en est celui des raisonnements par l'absurde où l'on ajoute aux données une proposition ($non(A)$) afin de montrer que c'est A qui est vraie.

Les paragraphes suivants essaieront d'expliquer tout ceci, en explicitant les principales règles d'écriture sous-jacentes. Ils permettront de mieux comprendre les différents statuts des propositions qui apparaissent dans un texte de démonstration.

1.1. Règle de l'hypothèse auxiliaire

Beaucoup d'énoncés sont du type "Montrer que si l'on a **P**, alors on a **Q**", c'est-à-dire "démontrer ($\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$)".
Dans la pratique, on commence souvent en écrivant "on suppose **P**", c'est-à-dire que l'on considère **P** comme une nouvelle donnée, puis on cherche à démontrer **Q**. La démonstration s'achève par une phrase du genre "on a montré **Q**" et il peut être bon de prendre la peine de rappeler la conclusion globale "on a montré ($\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$)". On peut expliciter cette démarche par la règle suivante :

Pour démontrer ($\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$) :

1) on ajoute **P** aux données.
2) on démontre que **Q** est vraie.

Exemple

- *Enoncé* - Soit n un entier. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.
- *Démonstration* - On suppose que n est pair. Par définition d'un nombre pair, on peut donc écrire $n = 2k$ où k est un entier. On en déduit $n^2 = 4k^2$, donc $n^2 = 2k'$ où $k' = 2k^2$. Donc n^2 est pair.
  On a montré que si n est pair, alors n^2 l'est aussi.
- *Commentaire* - Soient **P** la proposition "n est pair" et **Q** la proposition "n^2 est pair". La proposition à démontrer est "si **P**, alors **Q**", c'est-à-dire ($\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$). La première ligne de la démonstration revient à ajouter **P** aux données, le deuxième paragraphe démontre **Q**, le troisième est la conclusion.

Exercice - Soit n un entier naturel. Montrer que si n est impair, alors n^2 est impair.

1.2. Règle du quelque soit

On a aussi très souvent à montrer une proposition du type ($\forall x \in E$, $\mathbf{P}(x)$). Dans la pratique, on commence en écrivant une expression du style "Soit x un élément de E", ou "Considérons un élément x de E", puis on écrit une démonstration de $\mathbf{P}(x)$. Lorsque cette démonstration est un peu longue, on peut l'encadrer par l'annonce "On va montrer qu'on a $\mathbf{P}(x)$" et la conclusion partielle "On a montré $\mathbf{P}(x)$". On peut ajouter la conclusion globale "On a montré ($\forall x \in E$, $\mathbf{P}(x)$)". Cette démarche peut être explicitée par la règle suivante :

Pour démontrer ($\forall x \in E$, $\mathbf{P}(x)$) :

1) on choisit une lettre x qui n'a pas déjà été utilisée ailleurs et on ajoute la donnée $x \in E$;
2) on démontre que $\mathbf{P}(x)$ est vraie.

Exemple

- *Enoncé* - Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a ($x > 1 \Longrightarrow x^2 + x + 1 > 3$).
- *Démonstration* - Soit x un nombre réel.
  Supposons $x > 1$. On a alors $x^2 > 1$. On en déduit $x^2 + x + 1 > 1 + 1 + 1$, c'est à dire $x^2 + x + 1 > 3$.
  On a bien le résultat.
- *Commentaire* - Ici $\mathbf{P}(x)$ est la proposition ($x > 1 \Longrightarrow x^2 + x + 1 > 3$). Le premier alinea correspond au point 1. La proposition $\mathbf{P}(x)$ est une implication de la forme ($\mathbf{P_1} \Longrightarrow \mathbf{Q_1}$). Pour la démontrer, on utilise la règle de l'hypothèse auxiliaire, en ajoutant $\mathbf{P_1}$ aux données (on a écrit "Supposons que l'on a $x > 1$") et on démontre $\mathbf{Q_1}$. Les deux premières phrases reviennent à ajouter les données "x réel" et "$x > 1$". On aurait pu les condenser en écrivant "Soit x un réel tel que $x > 1$".

Exercice - Démontrer que pour tout réel x, on a ($x > 2 \Longrightarrow 2e^x + x^2 - 3x > 0$).

1.3. Règle des cas

Pour démontrer une proposition **P**, on peut vouloir se servir d'une proposition déjà démontrée de la forme (**A** *ou* **B**). Pour cela :

1) on suppose **A** vraie et on démontre **P** ;
2) on suppose **B** vraie (sans hypothèse sur **A**) et on démontre **P**.

La règle peut être annoncée au début par une phrase du genre “il y a deux cas”, ou mise en évidence par deux paragraphes, un pour chaque cas ; le point 1 se traduit par une expression du genre “supposons **A**”, le point 2 par “supposons maintenant **B**” ou “dans le cas où **B**”. On applique souvent la règle des cas en prenant pour proposition **B** une proposition équivalente à (*non* **A**) ; (en effet, **A** *ou* (*non* **A**) fait partie des propositions vraies, quelque soit **A**). Le point 2 se réduit alors à supposer (*non* **A**) vraie et se traduit par “dans le cas où (*non* **A**)”.

Exemple

- *Enoncé* - Soient x, y, λ des nombres réels, avec $\lambda < 0$.
  Montrer que l'on a $\max(\lambda x, \lambda y) = \lambda\ \min(x, y)$.
- *Démonstration* - Il y a deux cas : le cas $x \leq y$ et le cas $x > y$;
  Supposons d'abord $x \leq y$. Alors comme on a $\lambda < 0$, on a $\lambda x \geqslant \lambda y$, donc $\max(\lambda x, \lambda y) = \lambda x$. D'autre part, on a $\min(x, y) = x$.
  On a donc bien $\max(\lambda x, \lambda y) = \lambda \min(x, y)$.
  On suppose maintenant $x > y$. Alors comme on a $\lambda < 0$, on a $\lambda x < \lambda y$, donc $\max(\lambda x, \lambda y) = \lambda y$. D'autre part, on a $\min(x, y) = y$.
  On a donc encore $\max(\lambda x, \lambda y) = \lambda \min(x, y)$.
  Dans les deux cas, on a l'égalité demandée.
- *Commentaire* - La proposition A est la proposition $x \leq y$ et la proposition B est $x > y$ qui est équivalente à (*non* **A**). Les deux cas sont clairement annoncés dans le premier alinea. Ils sont successivement traités dans les deux paragraphes suivants. Les deux points sont seulement suggérés par la succession “d'abord”, “maintenant”. La dernière ligne est la conclusion.

Exercice - Montrer que pour tout réel x, $(\sqrt{x^2} = 2x + 3 \Longrightarrow x = -1)$.

1.4. Nommer un objet

Pour démontrer une proposition **Q** en utilisant une donnée de la forme $(\exists x \in E, \mathbf{P}(x))$:

1) on choisit une lettre x_0 par exemple, qui n'a pas été déjà utilisée et surtout qui n'apparait pas dans la proposition **Q** ;
2) on ajoute aux hypothèses la proposition ($x_0 \in E$ *et* $\mathbf{P}(x_0)$) ;
3) on démontre **Q**.

En pratique, les points 1 et 2 sont traduits par une expression de la forme “Soit x_0 un élément de E tel que $\mathbf{P}(x_0)$” ou “On sait que $(\exists x \in E, \mathbf{P}(x))$; soit x_0 un tel élément”. Il est souvent bon de justifier le “On sait que ” par la référence à une définition ou à un théorème.

Exemple

- *Enoncé* - Soit a un réel. Montrer que si $([0, 1] \cap [a - 1/2, a + 1/2] \neq \emptyset)$, alors $-1/2 \leq a \leq 3/2$.
- *Démonstration* - Soit $E = [0, 1] \cap [a - 1/2, a + 1/2]$. On suppose que E est non vide. Soit x_0 un élément de cet ensemble. On a donc $0 \leq x_0 \leq 1$ et $a - 1/2 \leq x_0 \leq a + 1/2$, d'où $0 \leq x_0 \leq a + 1/2$ et $a - 1/2 \leq x_0 \leq 1$. On en déduit $0 \leq a + 1/2$ et $a - 1/2 \leq 1$, d'où $-1/2 \leq a \leq 3/2$. On a bien le résultat demandé.
- *Commentaire* - Dire que E est non vide, c'est dire $(\exists x \in E)$. On utilise la règle “nommer un objet” en considérant l'un des éléments de E (il peut y en avoir beaucoup) et en l'appelant x_0. Les inégalités vérifiées par x_0 permettent de contrôler a.

Exercice - Montrer que tout entier multiple de 6 est multiple de 2.

1.5. Raisonnement par l'absurde

Principe - On veut démontrer **P**. Pour cela :

1) on ajoute (*non* **P**) aux données ;
2) on démontre qu'on a à la fois **Q** et (*non* **Q**) pour une certaine proposition **Q**.

En pratique, le point 1 s'exprime en disant "supposons (*non* **P**)". La démonstration contient souvent des phrases au conditionnel. La fin du raisonnement par l'absurde est indiquée par une expression comme "Il y a contradiction" ou "C'est impossible". On peut annoncer "Raisonnons par l'absurde" et conclure "On a donc **P**".

Exemple

- *Enoncé* - Montrer que 0 n'est pas racine du polynôme $A(x) = x^4 + 12x - 1$.
- *Démonstration* - On raisonne par l'absurde. Supposons que 0 soit racine de A. Par définition, on aurait donc $A(0) = 0$; or le calcul montre que $A(0) = -1$, d'où $-1 = 0$. On obtient une contradiction.
- *Commentaire* - La proposition **P** est ici "0 n'est pas racine du polynôme A" et (*non* **P**) est "0 est racine de A" ; la proposition **Q** n'est pas précisée, ce pourrait être $(-1 \neq 0)$.

Exercice - Soit f l'application de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ pour $x \geqslant 1$. Montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que f n'est pas dérivable au point 1.

1.6. Raisonnement par contraposition

La proposition ((non**Q**) $\Rightarrow$ (non **P**)) est appelée la *contraposée* de la proposition (**P** $\Rightarrow$ **Q**). Elle lui est équivalente.
Pour démontrer (**P** $\Longrightarrow$ **Q**), on peut donc démontrer ((*non* **Q**) $\Longrightarrow$ (*non* **P**)).

Exemple

- *Enoncé* - Soit x un nombre réel. Montrer que ($x^3 = 2 \Longrightarrow x < 2$.)
- *Démonstration* - On suppose $x \geqslant 2$. On a donc $x^3 \geqslant 8$ et en particulier $x^3 \neq 2$. On a donc bien le résultat.
- *Commentaire* - Ici, **P** est la proposition $(x^3 = 2)$ et **Q** la proposition $(x < 2)$. La proposition contraposée est la proposition $(x \geqslant 2 \Longrightarrow x^3 \neq 2)$. On lui applique la règle de l'hypothèse auxiliaire en disant "on suppose $x \geqslant 2$".
  On aurait pu annoncer au début "On va raisonner par contraposition, c'est-à-dire démontrer $(x \geqslant 2 \Longrightarrow x^3 \neq 2)$." On a sous-entendu cette phrase, car l'exemple proposé est assez simple pour que le lecteur la restitue lui-même.

Exercice - Montrer que pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.

1.7. Pour démontrer une équivalence

Pour démontrer (**P** $\Longleftrightarrow$ **Q**) :

- on peut démontrer d'abord (**P** $\Longrightarrow$ **Q**), puis (**Q** $\Longrightarrow$**P**), (la proposition (**Q** $\Longrightarrow$ **P**) est appelée la *réciproque* de (**P** $\Longrightarrow$**Q**)).
- on peut aussi démontrer d'abord (**P** $\Longrightarrow$**Q**), puis (*non* **P**) $\Longrightarrow$ (*non* **Q**)) (qui est la contraposée de (**Q** $\Longrightarrow$**P**).

Exemple

- *Enoncé* - Montrer que pour tout x réel, ($\sqrt{2x^2+2} = 3+x$) est équivalent à ($x \in \{-1, 7\}$).
- *Démonstration* - Soit x un réel.
  Supposons que ($\sqrt{2x^2+2} = 3+x$). En élevant les deux membres au carré, on obtient $2x^2+2 = (3+x)^2 = x^2+6x+9$. Donc x est racine de l'équation du second degré $x^2-6x-7=0$. On obtient donc ($x \in \{-1, 7\}$).
  Réciproquement, supposons ($x \in \{-1, 7\}$). Dans le cas où $x=-1$, on a $2x^2+2=4$, donc $\sqrt{2x^2+2} = 2$, et $3+x = 2$ donc $\sqrt{2x^2+2} = 3+x$. Lorsque $x = 7$, on a $2x^2+2 = 100$, donc $\sqrt{2x^2+2} = 10$, et $3+x = 10$ donc $\sqrt{2x^2+2} = 3+x$.
  On a bien démontré l'équivalence cherchée.
- *Commentaire* - L'énoncé contient l'expression "pour tout x réel" ; il est de la forme ($\forall x \in \mathbb{R}$, ($\mathbf{P}(x) \iff \mathbf{Q}(x)$)), où $\mathbf{P}(x)$ est la proposition ($\sqrt{2x^2+2} = 3+x$) et $\mathbf{Q}(x)$ la proposition ($x \in \{-1, 7\}$).

A la première ligne, la phrase "Soit x un réel" signale l'utilisation de la règle du quelque soit. Ensuite, on démontre ($\mathbf{Q}(x) \iff \mathbf{P}(x)$).
Au premier paragraphe, on montre ($\mathbf{P}(x) \Longrightarrow \mathbf{Q}(x)$). Le deuxième commence par "Réciproquement", qui annonce qu'on va montrer ($\mathbf{Q}(x) \Longrightarrow \mathbf{P}(x)$) et pour cela on utilise la règle des cas.

Autre exemple :

- *Enoncé* - Montrer que l'entier n est pair si et seulement si n^2 est divisible par 4.
- *Démonstration* - Supposons n pair, on peut écrire $n = 2k$ où k est un entier ; alors on a $n^2 = 4k^2$, donc on a $n^2 = 4k'$ où $k' = k^2$. Donc n^2 est divisible par 4.
  Réciproquement, supposons que n est impair ; on peut écrire $n = 2k+1$ où k est un entier ; alors on a $n^2 = 4k^2+4k+1$; le reste de la division de n^2 par 4 est égal à 1, donc n^2 n'est pas divisible par 4.
- *Commentaire* - Ici, $\mathbf{P}$ est la proposition "n est pair" et $\mathbf{Q}$ est la proposition "n^2 est divisible par 4". Au premier paragraphe, on a montré ($\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$). Au deuxième, on a montré (*non* $\mathbf{P} \Longrightarrow$ *non* $\mathbf{Q}$)

Exercice - 1°) Compléter la première démonstration en ajoutant des phrases de conclusion.
2°) Dans la deuxième démonstration, on a utilisé implicitement la règle "nommer un objet". Repérer à quels endroits. Compléter la démonstration pour la rendre plus explicite.

- Ne pas confondre la réciproque d'une proposition ($\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$) qui est ($\mathbf{Q} \Longrightarrow \mathbf{P}$) avec sa contraposée qui est ((*non* $\mathbf{Q}$) $\Longrightarrow$ (*non* $\mathbf{P}$)).
- Pour démontrer une équivalence, beaucoup d'étudiants utilisent systématiquement une suite d'équivalences. Bien sûr, cela est légitime s'il s'agit de vraies équivalences. Mais le plus souvent les propositions qu'elles font intervenir contiennent des quantificateurs sous-entendus, qu'on a tendance à oublier, ce qui conduit à la faute. Il faut en règle générale rester prudent dans l'utilisation des équivalences, (voir l'exercice d'application n°5 pour un exemple).

1.8. Pour démontrer (Q ou R)

Dans le cas où $\mathbf{Q}$ est vraie, ($\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{R}$) est automatiquement vraie. On suppose donc $\mathbf{Q}$ fausse et on montre que $\mathbf{R}$ est vraie, c'est-à-dire que l'on montre ((non $\mathbf{Q} \Longrightarrow \mathbf{R}$).

Remarque - Les propositions ($\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{R}$) et ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}$) sont équivalents. Il peut être plus simple de prendre la négation de $\mathbf{R}$ que de $\mathbf{Q}$.

Exemple

- *Enoncé* - Soit n un entier. Montrer que n est impair ou n^2 est pair.
- *Démonstration* - On suppose que n n'est pas impair, c'est à dire que n est pair. Soit k un entier tel que $n = 2k$. On a $n^2 = 4k^2$, donc $n^2 = 2k'$ où $k' = 2k^2$. Donc n^2 est pair. On a donc bien n impair ou n^2 pair.
- *Commentaire* - La proposition à démontrer est de la forme (**Q** ou **R**) où **Q** est la proposition "n est impair " et **R** la proposition "n^2 est pair". **Q** est fausse est introduit par "On suppose que n n'est pas impair".

1.9. Raisonnement par récurrence

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels*.
Le raisonnement par récurrence s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un entier naturel n. Il est une conséquence de la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (basée sur les axiomes de Peano). Ce raisonnement peut prendre différentes formes.

- RECURRENCE SIMPLE
  C'est le type le plus utilisé. Si les hypothèses suivantes sont vérifiées
  - la propriété est vraie en n_0,
  - lorsque la propriété est vraie pour $k \geqslant n_0$, elle est vraie pour $k + 1$,

  alors la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exercice - Montrer que, pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

- RECURRENCE FORTE
  C'est la forme la plus générale du raisonnement par récurrence. Si les hypothèses suivantes sont vérifiées
  - la propriété est vraie en n_0,
  - lorsque la propriété est vraie pour tout entier p tel que $n_0 \leq p \leq k$, , elle est vraie pour $k + 1$,

  alors la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exercice - Soit $(x_n)_n$ la suite réelle définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_n \leq 2^n$.

Remarques - • Définissez clairement l'hypothèse de récurrence, donnez-lui un nom qui mette en évidence qu'elle dépend d'un entier.
• Si l'hypothèse de récurrence ne vous est pas donnée, il faut essayer de la découvrir avec les cas $n = n_0$, $n = n_0 + 1$,. . .

SOMME ET PRODUIT

Soit p et q deux entiers naturels avec $p \leq q$ et f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\sum_{i=p}^{q} f(i)$ la somme des nombres $f(i)$ lorsque i varie de p à q :

$$\sum_{i=p}^{q} f(i) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q-1) + f(q).$$

$\displaystyle\prod_{i=p}^{q} f(i)$ le produit de ces mêmes termes :

$$\prod_{i=p}^{q} f(i) = f(p) \times f(p+1) \times \cdots \times f(q-1) \times f(q).$$

Remarques - • $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} f(i) = \sum_{j=p}^{q} f(j)$.

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i) + f(n)$.

Exemples - • $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

• $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 1 = 1$

Remarque - La récurrence ne sert pas qu'à démontrer certaines propriétés sur l'ensemble des entiers naturels ; elle permet de donner des définitions. Par exemple, le symbole $\sum$ est défini de manière correcte par

$$\begin{array}{rl} \text{pour } q-p=0 & \displaystyle\sum_{i=p}^{q} f(i) = f(p) \\ \text{si } q \geqslant p \geqslant 0 & \displaystyle\sum_{i=p}^{q+1} f(i) = \sum_{i=p}^{q} f(i) + f(q+1) \end{array}$$

Exemple - Pour n entier naturel, calculer la somme

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (2i+1).$$

On peut commencer par étudier les cas $n = 1, n = 2$, etc. On trouve $S_0 = 1$, $S_1 = 4$, $S_2 = 9$ et on peut deviner que l'on a $S_n = (n+1)^2$ pour tout n. Reste à le vérifier en écrivant une démonstration de cette proposition.

• *Démonstration* - On va montrer que pour tout entier n, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2.$$

Pour k entier naturel, notons S_n la somme

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (2i+1).$$

et $\mathbf{P}(n)$ la propriété $S_n = (n+1)^2$. Il faut montrer que $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout n. On procède par récurrence sur n.

Montrons que $\mathbf{P}(0)$ est vraie. Pour $n = 0$, on a :

$$S_0 = \sum_{i=0}^{0} (2i+1) = 1 \quad \text{et} \quad (n+1)^2 = 1.$$

Donc $\mathbf{P}(0)$ est vraie.

Soit k un entier tel que $\mathbf{P}(k)$ est vraie ; montrons qu'alors $\mathbf{P}(k+1)$ est vraie. L'hypothèse est $S_k = (k+1)^2$ et on veut montrer que l'on a $S_{k+1} = (k+2)^2$. Or on a :

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (2i+1) = S_k + (2k+3).$$

En utilisant l'hypothèse, on obtient :
$$S_{k+1} = (k+1)^2 + (2k+3) = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2.$$

Donc $\mathbf{P}(k+1)$ est vraie.
On a donc montré que $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout n, ce qui est équivalent au résultat cherché.
• *Commentaire* - L'utilisation d'une récurrence permet très souvent de répondre à ce type de question. Il faut prendre la peine de bien préciser l'hypothèse de récurrence, de lui donner un nom (ici $\mathbf{P}(n)$) et de bien signaler les étapes. Il faut également faire attention au démarrage : vérifiez que le passage de k à $k+1$ marche dès le départ et qu'il n'y ait pas un cas particulier pour n_0, $n_0+1, \ldots$

Exercice - 1°) Montrer, par récurrence sur n, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.

2°) Démontrer la formule du binôme :

pour tous les complexes a et b, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$ *avec* $\displaystyle C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

1.10. D'autres règles

Il y a beaucoup d'autres règles qui peuvent intervenir dans une démonstration. Par exemple, la règle dite du *modus ponens* : "si on a $\mathbf{P}$ et ($\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$), alors on a $\mathbf{Q}$", ou des *syllogismes* : "si on a ($\forall x \in E$, $\mathbf{P}(x)$) et si a est un élément de E, alors on a $\mathbf{P}(a)$". L'exemple célèbre de syllogisme est "Tous les hommes sont mortels et Socrate est un homme ; donc Socrate est mortel."
Nous ne décrirons pas davantage ces règles, car leur utilisation est simple et occasionne généralement peu de fautes.

Exercice - Expliciter le syllogisme précédent à l'aide de quantificateurs.

---

2. Pour trouver une démonstration

Bien sûr, on ne peut pas rédiger une démonstration complète d'un énoncé lorsque l'on n'a aucune idée des raisons qui font que cet énoncé est vrai. Cependant, même lorsqu'on a bien compris ces raisons, il peut être difficile de rédiger une bonne démonstration. A l'inverse, pour trouver des idées qui conduisent à une solution, il est souvent efficace de commencer à écrire une démonstration, même si au départ, on ne sait pas encore comment on va la terminer. Il y a donc complémentarité entre la recherche de la solution d'un problème et l'écriture de textes qui pourraient devenir une démonstration.
Pour débuter une démonstration, il faut d'abord bien examiner la structure de la proposition à démontrer. Il y a en effet de nombreuses stratégies possibles, et cela aidera à en choisir une qui soit bien adaptée.

2.1. On peut décider d'aborder le problème directement.

1) Lorsque la proposition est de la forme ($\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q}$), on applique la règle de l'hypothèse auxiliaire, on commence le texte par "Supposons que $\mathbf{P}$" et le nouvel objectif est de démontrer $\mathbf{Q}$.
2) Lorsque la proposition est de la forme ($\forall x \in E, \mathbf{P}(x)$), on utilise la règle du "quelque soit". On commence par "Soit $x \in E$, démontrons $\mathbf{P}(x)$".
3) Lorsque la proposition est de la forme ($\exists x \in E$, $\mathbf{P}(x)$), il s'agit de trouver un élément x_0 qui vérifie $\mathbf{P}(x_0)$. Le premier travail sera d'essayer de deviner quel élément pourrait convenir.

4) Lorsque la proposition est de la forme (**P** *et* **Q**), on démontre successivement **P** puis **Q**. On commence par écrire "Démontrons d'abord **P**", puis dans un autre paragraphe "Démontrons maintenant **Q**."
5) Lorsque la proposition est de la forme (**P** *ou* **Q**), il suffit de démontrer l'une des deux propositions ; lorsque l'on essaie de trouver une démonstration, on s'aperçoit parfois que l'une des propositions parait plus facile à démontrer que l'autre ; c'est elle que l'on pourra alors décider d'essayer de démontrer.

Exemple

• *Enoncé* - Montrer qu'il existe un réel x tel que $\sqrt{x^2 - x + 9} > \sqrt{x^2 + x + 4}$).
• *Démonstration* - On prend $x = 0$; on a $x^2 - x + 9 = 9$ et $x^2 + x + 4 = 4$, donc $\sqrt{x^2 - x + 9} = 3$ et $\sqrt{x^2 + x + 4} = 2$. Or, $3 > 2$, donc 0 convient.

Autre exemple :

- *Enoncé* - Montrer que pour tous les réels x et y, on a $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
- *Démonstration* - Soient x et y deux réels. On doit démontrer $|x| - |y| \leq |x - y|$ et $|y| - |x| \leq |x - y|$.
  Démontrons d'abord la première proposition. On a $|x| = |(x - y) + y|$ donc par l'inégalité triangulaire $|x| \leq |x - y| + |y|$ et on en déduit $|x| - |y| \leq |x - y|$.
  Pour la deuxième proposition, on a de même $|y| \leq |y - x| + |x|$ et on en déduit $|y| - |x| \leq |y - x|$.
  On a bien le résultat cherché.
- *Commentaire* - Les réels x et y ayant été fixés, on a à démontrer une proposition du genre ($\mathbf{P}(x, y)$ *et* $\mathbf{Q}(x, y)$). On aurait pu choisir de démontrer ($\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{P}(x, y)$) puis ($\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q}(x, y)$). Pour démontrer la deuxième proposition, il aurait alors suffit d'utiliser la première en y remplaçant partout le couple (x, y) par le couple (y, x).

2.2. On peut utiliser des moyens indirects.

1) On peut commencer un raisonnement par l'absurde.
2) On peut décider de démontrer la contraposée de la proposition demandée.
3) On peut introduire des cas, (en particulier lorsque l'on dispose d'une hypothèse de la forme (**A** *ou* **B**).
4) On peut utiliser des méthodes spécifiques au domaine concerné : par exemple, une démonstration par récurrence pour une proposition de la forme ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$), ou l'utilisation de tableaux de variations lorsque la proposition concerne une fonction de la variable réelle etc.
5) On peut obtenir le résultat d'un seul coup par un théorème approprié.

Exemple

- *Enoncé* - Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x + 1/x - 2 \end{array}$. Montrer que f s'annule en un point x de $\mathbb{R}_+^*$ au moins.
- *Démonstration* - L'application f est continue et $f(1) = -1$. L'image de f contient l'intervalle $f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$, c'est à dire $[-1, +\infty[$. Donc 0 est dans l'image de f, ce qui veut dire qu'il existe un x de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) = 0$.
- *Commentaire* - La proposition à démontrer est de la forme ($\exists x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 0$). Il n'y a pas de zéro évident. On utilise une propriété des fonctions continues (l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

2.3. On peut essayer de se ramener à une proposition plus simple.

Par exemple, pour démontrer une proposition du genre (**P** $\Longrightarrow$ **Q**) dans beaucoup de cas, on peut simplifier la démonstration car on a de façon évidente (par un théorème ou une définition) (**P** $\Longleftrightarrow$ **P'**) et (**Q'** $\Longleftrightarrow$ **Q**) ; on se ramène donc à prouver (**P'** $\Longrightarrow$ **Q'**).

Exemple

- *Enoncé* - Soit x un réel strictement positif. Montrer que si l'on a $x^2 - 3x \geqslant 0$, alors on a $x^2 + 8 \geqslant 5x + 4/x$.
- *Démonstration* - On a $x^2 - 3x = x(x-3)$, donc comme x est strictement positif, $x^2 - 3x$ est positif si et seulement si x est supérieur à 3. D'autre part, en multipliant les deux membres de l'inégalité ($x^2 + 8 \geqslant 5x + 4/x$) par le réel strictement positif x on obtient l'inégalité équivalente ($x^3 + 8x \geqslant 5x^2 + 4$) ; celle-ci est encore équivalente à ($x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geqslant 0$). Or on a $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2-4x+4) = (x-1)(x-2)^2$. On se ramène donc à démontrer que si l'on a $x \geqslant 3$, alors on a $(x-1)(x-2)^2 \geqslant 0$, ce qui est évident.
- *Commentaire* - Notons respectivement **P(x)**, **P'(x)**, **Q(x)** et **Q'(x)** pour $x > 0$ les propositions $x^2 - 3x \geqslant 0$, $x \geqslant 3$, ($x^2 + 8 \geqslant 5x + 4/x \geqslant 0$) et $(x-1)(x-2)^2 \geqslant 0$.
  On a montré les équivalences (**P(x)** $\Longleftrightarrow$ **P'(x)**) et (**Q'(x)** $\Longleftrightarrow$ **Q(x)**) ; l'implication (**P'(x)** $\Longrightarrow$ **Q'(x)**) est ici évidente. Tout ceci permet de conclure que l'on a (**P(x)** $\Longrightarrow$ **Q(x)**).

⚠ Lorsque l'on part comme ici de la proposition à démontrer **Q**, il faut être certain d'assurer le 'retour' et pour cela il faut faire bien attention à procéder par équivalences. Une faute fréquente est de commencer par écrire " si on a **Q**, alors on a **Q'**", ce qui consiste à prendre la conclusion cherchée comme hypothèse. Même si l'on démontre ensuite que **P** entraine **Q'**, cela ne prouve rien sur la proposition à démontrer **P** $\Longrightarrow$ **Q**.

3. Quelques types de problèmes à résoudre

3.1. Résultats sur les ensembles

Ces résultats sont souvent faciles à obtenir en adoptant une stratégie très liée à la formule que l'on veut démontrer. Par exemple, si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble E, et si on demande de démontrer $A \subset B$, il s'agit de montrer ($\forall x \in A$, $x \in B$). On commence par écrire "Soit x un élément de A ; montrons que x appartient à B". Si on demande de démontrer $A = B$, on peut démontrer successivement ($A \subset B$) et ($B \subset A$).

Exemple

- *Enoncé* - Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que l'on a ($A \subset B \Longrightarrow E \setminus B \subset E \setminus A$).
- *Démonstration* - Supposons que $A \subset B$ et montrons que $E \setminus B \subset E \setminus A$, c'est-à-dire que ($\forall x \in E \setminus B$, $x \in E \setminus A$). Soit donc x un élément de $E \setminus B$. Par définition, x appartient à E et x n'appartient pas à B. On veut montrer que x n'appartient pas à A. Raisonnons par l'absurde et supposons que x appartienne à A. Alors l'hypothèse $A \subset B$ montre que $x \in B$. Il y a contradiction.
  Donc $x \in E \setminus A$.
- *Commentaire* - On voit bien que cette démonstration est complètement guidée à chaque étape par la forme de la proposition que l'on cherche à démontrer, sauf lorsqu'on a introduit un raisonnement par l'absurde.

3.2. Enoncés d'analyse

Les énoncés d'analyse contiennent souvent beaucoup de quantificateurs, (par exemple, quand on parle d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le quantificateur $\forall x \in \mathbb{R}$ apparait presque toujours). On utilise donc très fréquemment les règles du "quelque soit" (pour le quantificateur $\forall$) et “nommer un objet” (pour le quantificateur $\exists$). Il faut bien expliciter dans la démonstration ce que désignent les lettres que l'on y introduit, et être attentif à leur ordre d'apparition qui doit correspondre à l'ordre des quantificateurs. En effet, beaucoup d'erreurs viennent d'une interversion de deux quantificateurs ou d'une mauvaise quantification qui masque le fait qu'une variable dépend d'une autre.

Exemple

- *Enoncé* - Montrer que si une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée, alors son carré l'est aussi.
- *Démonstration* - Soit f une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f^2 est bornée, c'est trouver un majorant de $|f^2|$, c'est-à-dire un réel M tel que $(\forall x \in \mathbb{R}, |f^2(x)| \leq M)$.
  On sait que f est bornée. Considérons un majorant M_0 de $|f|$. Soit x un réel. On a $|f(x)| \leq M_0$, donc $|f(x)^2| \leq M_0^2$.
  On a donc montré que $(\forall x \in \mathbb{R}, |f^2(x)| \leq M_0^2)$, c'est-à-dire que M_0^2 est un majorant de $|f^2|$; donc f^2 est bornée. On a bien le résultat demandé.
- *Commentaire* - On utilise la règle du “quelque soit” en introduisant f. On examine la proposition qui reste à démontrer (“f^2 bornée ”) et on la traduit. On utilise la règle “nommer un objet” en introduisant M_0. L'existence de M_0 est justifiée par le rappel de l'hypothèse “f bornée” et la définition d'une application bornée. C'est après avoir fixé M_0 qu'on réutilise la règle du “quelque soit” en introduisant x. Ainsi, on est sûr que M_0 ne dépend pas du choix de x. Une erreur fréquente est d'écrire “Soit x un réel. Soit M_0 un réel tel que $|f(x)| \leq M_0$ etc” En effet, M_0 et donc M_0^2 dépendent alors a priori de x ; on peut prendre $M_0 = |f(x)^2|$ par exemple, ce qui ne donnera évidemment pas du tout le résultat cherché.

3.3. Résolution d'équations.

Dans ce type de problème, on a souvent à raisonner en deux temps : l'analyse du problème puis la synthèse. On a intérêt à donner un nom, S par exemple, à l'ensemble des solutions. Dans l'analyse, on suppose que x est solution et on essaye de préciser x. Pratiquement, on montre $S \subset S'$, où S' est un ensemble dont on connait explicitement les éléments, ou qui en donne du moins une description simple. Dans la synthèse, on regarde si réciproquement $S' \subset S$.

Exemple

- *Enoncé* - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{x} + 2$.
- *Démonstration* - Notons S l'ensemble des solutions.
  Analyse - Soit $x \in S$. L'équation doit avoir un sens et donc il faut $x \geqslant 0$. D'autre part, on a $\sqrt{x} = x - 2$. En élevant cette dernière équation au carré, on obtient $x = x^2 - 4x + 4$, d'où $x^2 - 5x + 4 = 0$. Les solutions de cette nouvelle équation sont 1 et 4 qui sont toutes les deux positives. Donc $S \subset \{1, 4\}$.
  Synthèse - Soit $x = 4$; $\sqrt{x}$ a un sens, et $\sqrt{x} + 2 = 4 = x$, donc $4 \in S$.
  Soit $x = 1$; on a $\sqrt{x} + 2 = 3 \neq x$. Donc $1 \notin S$. On obtient donc $S = \{4\}$.
  Il y a une et une seule solution qui est 4.
- *Commentaire* - On a pris soin ici de vérifier que la formule a un sens. C'est un réflexe à acquérir et dans beaucoup de problèmes, cela permet d'éliminer certaines solutions dès le stade de l'analyse et simplifie la synthèse.

3.4. Contre-exemples

Supposons qu'on pose la question ouverte “la proposition $(\forall x \in E, \mathbf{P}(x))$ est elle vraie ?”
Si l'on trouve un x de E tel que $\mathbf{P}(x)$ soit fausse, alors on peut affirmer que la proposition est fausse. On dit qu'on a trouvé un contre-exemple. (Par contre, si on trouve des x tels que la proposition soit vraie, au mieux, on peut se convaincre qu'elle est toujours vraie et avoir une idée de la façon d'aborder la démonstration, mais on n'a rien démontré.)

Exemple - A-t-on $(\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - x + 9} \leq \sqrt{x^2 + x + 4})$?

La réponse est non. En effet, si on prend $x = 0$, on obtient $x^2 - x + 9 = 9$ et $x^2 + x + 4 = 4$, donc $\sqrt{x^2 - x + 9} = 3$ et $\sqrt{x^2 + x + 4} = 2$. Or, on a $3 > 2$. Donc 0 fournit un contre-exemple.

Pour répondre à cette question, il est inutile de chercher à déterminer quels sont exactement les x qui vérifient $\sqrt{x^2 - x + 9} \leq \sqrt{x^2 + x + 4}$. Une erreur fréquente est de se contenter d'écrire :
"Soit x un réel. Si $(\sqrt{x^2 - x + 9} \leq \sqrt{x^2 + x + 4}$, alors on a $(x^2 - x + 9 \leq x^2 + x + 4)$, donc $2x+5 \leq 0)$. Or ceci est faux." En effet, la proposition $(2x+5 \leq 0)$ n'est pas toujours fausse. Il faudrait ajouter "Pour $x = 0$ par exemple, on a $(2x + 5 = 5)$ qui est strictement positif."

4. Quelques conseils pour résoudre un problème et écrire une démonstration.

Pour parvenir à résoudre un problème, il faut commencer par bien comprendre le texte. Ensuite, on peut commencer à chercher une solution et essayer de démarrer un texte de démonstration. Quand on a compris, il reste à rédiger une démonstration rigoureuse.

4.1. Pour bien lire le texte

Il ne faut pas hésiter à formaliser toutes les propositions de l'énoncé que l'on juge peu claires ou complexes. Il faut en particulier restituer les quantificateurs sous-entendus dans le texte, se rappeler et traduire les définitions des mots utilisés. On peut aussi introduire des notations pour préciser le texte. Il faut bien repérer ce qui est donné et ce que l'on cherche à démontrer.

4.2. Pour chercher une solution.

Tous les moyens sont bons ! On peut essayer de démarrer une démonstration au vu de la structure de la proposition à démontrer ou de la forme des hypothèses, comme on l'a dit plus haut. On peut essayer de voir les liens entre hypothèses et conclusion, se rappeler les théorèmes qui ont un rapport avec l'une ou l'autre, tirer des conséquences élémentaires des définitions et des hypothèses. Il ne faut pas hésiter parallèlement à essayer des exemples, à faire des dessins. On peut aussi se rappeler la solution d'un problème analogue.
Si on est 'coincé', il faut vérifier qu'on n'a pas oublié ou affaibli une hypothèse (en utilisant seulement une conséquence de cette hypothèse, qui contient moins d'informations qu'elle) ou que la clé de la solution ne se trouve pas à la question précédente.

4.3. Pour rédiger une démonstration.

Annoncez ce que vous allez faire et donnez vos conclusions (en disant "on va montrer que ..." , "on va raisonner par l'absurde", "on a montré que ..."). Cela permet de structurer les démonstrations et de les rendre plus claires. C'est aussi un bon moyen pour ne pas se tromper. Vous pouvez aussi admettre provisoirement un résultat dont la démonstration semble difficile ou ennuyeuse ("supposons qu'on ait démontré que..., alors...").
N'hésitez à être assez explicite et à détailler les étapes au début. Même si cela donne des démonstrations trop longues, ne cherchez pas à les raccourcir avant d'avoir acquis assez d'aisance pour écrire des démonstrations exactes qui soient plus courtes.

Fixez vos notations. Il ne faut pas hésiter à introduire des notations pour préciser le texte, mais elles doivent être expliquées clairement.
En particulier, on voit que dans la rédaction d'une démonstration peu de quantificateurs apparaissent dans le corps du texte (par exemple, si l'on utilise les règles du " quelque soit" et "nommer un objet", on élimine les $\forall$ et $\exists$). En revanche, on est amené à introduire de nouvelles lettres (en disant par exemple "soit x tel que ...") Il est indispensable d'être très explicite sur le statut de ces lettres, c'est-à-dire sur les objets qu'elles représentent et les propriétés qu'elles possèdent. De façon générale, il faut se donner pour règle de *vérifier à*

chaque fois qu'une lettre apparait dans une démonstration, qu'elle a été convenablement "déclarée", c'est-à-dire que son statut a été clairement précisé. Les fautes les plus fréquentes et les plus dangereuses sont dues à l'oubli de cette règle. Par exemple, écrire $ln(x) = 2$ sans avoir précisé que x est un réel strictement positif est inadmissible, écrire "e^x est toujours positif" conduira (pour un θ réel) à "$e^{i\theta} \geqslant 0$", ce qui ne veut plus rien dire. Ecrivez par exemple, "soit x un réel strictement positif tel que $ln(x) = 2$" ou "pour tout x réel, e^x est positif".

Justifiez les étapes de votre démonstration. Pour cela citez les théorèmes utilisés et rappelez les définitions. Vérifiez que les formules que vous écrivez ont un sens, ce qui vous aidera souvent à mieux préciser le statut des lettres utilisées et vous permettra d'éviter certains pièges. En particulier, validez les petits calculs qui posent souvent problème (division d'une égalité, multiplication d'une inégalité par une constante, changement de variable etc). Par exemple, $(x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1)$ n'est pas vraie pour tout réel x ; même si les hypothèses précisent que x est positif, rappelez-le à cet endroit, cela vous évitera d'oublier le cas x négatif ou nul une autre fois.

Refusez les abus de langage. Une partie de l'énoncé peut être formalisée (par exemple "si $n = 2$, alors $n^2 = 4$"), mais vous devez pouvoir restituer une phrase intelligible en énonçant la partie formalisée ($n = 2$ s'énonce "n est égal à 2"). N'utilisez pas le symbole $\Longrightarrow$ comme abréviation de "donc" ni $\Longleftrightarrow$ comme abréviation de "ce qui est équivalent à", ni $\forall$ et $\exists$ comme abréviations de "pour tout" et "il existe". Tant que les démonstrations sont simples ces abus de langage ont peu de conséquences, mais pour une démonstration compliquée, ils rendent le texte incompréhensible ou engendrent des fautes.
Par exemple, la rédaction suivante est correcte :

$$\text{“on a } x > 2 \text{ et on sait que si } x > 2, \text{ alors } x^2 \neq 1 \text{ ; on en déduit } 2x^2 \neq 2.''$$

On peut l'abréger, si l'implication $(x > 2 \Longrightarrow x^2 \neq 1)$ parait assez évidente, en :

$$\text{“on a } x > 2, \text{ donc } x^2 \neq 1 \text{ et donc } 2x^2 \neq 2.''$$

Mais la rédaction suivante est inadmissible car illisible :

$$\text{“}x > 2 \text{ et } x > 2 \Longrightarrow x^2 \neq 1 \Longrightarrow 2x^2 \neq 2.''$$

et celle-ci (où les $\Longrightarrow$ ont probablement été mis pour "donc") énonce un résultat généralement faux (lequel ?) :

$$(x > 2 \Longrightarrow x^2 \neq 1) \Longrightarrow 2x^2 \neq 2.$$

On peut se donner pour règle de *ne pas remplacer les mots qui articulent le texte par des symboles.*

Relisez-vous toujours quand vous pensez avoir fini, pour contrôler s'il n'y a pas d'erreur et améliorer vos explications. Il peut y avoir beaucoup de démonstrations d'un même problème ; en vous relisant, vous trouverez peut-être moyen de simplifier la vôtre.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice n°1

On demande de montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 3$, si n est premier, alors n est impair. On propose la démonstration suivante :
"Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$.
Démontrons que si n est pair, n n'est pas premier, ce qui est équivalent au résultat demandé.
Supposons n pair.
Alors n est divisible par 2 et comme on a $n \geqslant 3$, n n'est pas premier."
1) Formalisez l'énoncé (en gardant les expressions "n premier" et "n impair").
2) Quelles règles utilise-t-on dans chacun des trois premiers alineas ?
3) Compléter la dernière ligne pour la rendre plus explicite.
4) Quelles données y utilise-t-on ?
5) Quelle conclusion peut-on tirer des alineas 3 et 4 ?

Exercice n°2

On a demandé de montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x + 1/x) \geqslant 2)$. Pourquoi le raisonnement ci-dessous a-t-il valu la note zéro à son auteur ?
"Si $(x + 1/x) \geqslant 2$, on a $x^2 + 1 \geqslant 2x$, donc $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$. Or, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ qui est positif. On a bien le résultat demandé."
Pouvez-vous écrire une démonstration correcte ?

Exercice n°3

Voici un énoncé : "Soit E un ensemble non vide et A, B et C trois sous-ensembles non vides de E. Montrer que : $A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C$".
On propose le texte incomplet suivant :
"............... $A\Delta B = A\Delta C$; Pour montrer que $B = C$, il ....de montrer que $B \subset C$ et $C \subset B$. .... $x \in B$. .... $x \in A$, ... $x \notin A$. .... x appartienne à A, ... $x \in A\cap B$, ... $x \notin A\Delta B$. .... $A\Delta B = A\Delta C$,............... $(A\backslash C) \subset A\Delta C$, ... $x \notin (A \setminus C)$ et .... $x \in A$, ... $x \in C$. .... x n'appartient pas à A, ... $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, ... $x \in A\Delta B = A\Delta C$. .... $x \notin A$; .... que $x \in C \setminus A$; .... encore $x \in C$. On a donc montré que .... Le problème étant symétrique en B et C, ... $C \subset B$. .... $B = C$."
1) Compléter ce texte pour en faire une démonstration et séparer-le en paragraphes pour rendre sa structure plus claire :
2) Les hypothèses "non vides" ont-elles servi ?

Exercice n°4

On considère l'énoncé suivant : "l'application $f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ est-elle surjective ?" (pour la définition de "surjective" voir la section 5.5. du polycopié).
Trouver la faute dans le raisonnement suivant :
"Soit y un réel ; il y a deux cas : le cas $y \geqslant 0$ et le cas $y < 0$.
Lorsque $y \geqslant 0$, l'équation $y = x^2$ a deux solutions $x = \sqrt{y}$ et $x = -\sqrt{y}$; donc f est surjective.
Dans le cas où $y < 0$, l'équation $y = x^2$ n'a pas de solution ; donc f n'est pas surjective.
On conclut que f est surjective si $y \geqslant 0$ et f n'est pas surjective sinon."

Exercice n°5

On propose le texte suivant :
"*Enoncé -*
Soient $u = (a, b)$ et $u' = (a', b')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Les deux vecteurs u et u' sont proportionnels si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Démonstration -
Dire que u et u' sont proportionnels est équivalent à dire qu'il existe un réel k tel que $u = k.u'$, c'est-à-dire ($a = ka'$ et $b = kb'$), ce qui se traduit par :
- si $a' \neq 0$, $k = \frac{a}{a'}$ donc $b = \frac{a}{a'}b'$ et $ab' - a'b = 0$.
- si $a' = 0$, alors $a = 0$ et donc aussi $ab' - a'b = 0$.
Finalement, on a bien l'équivalence annoncée. "
Cette "démonstration" n'en est pas une. Pourquoi ?

Exercice n°6

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Exercice n°7

Soient a et b deux réels tels que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad a < b + \varepsilon)$.
Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, qu'alors $a \leq b$.

Exercice n°8

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. A-t-on :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \quad (fg = 0 \Longrightarrow (f = 0 \, ou \, g = 0)) \quad ?$$

INDICATIONS ET SOLUTIONS SOMMAIRES

Exercice n°1

1) L'énoncé peut se traduire par :
$\forall n \in \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \geqslant 3\}(n \text{ premier } \Longrightarrow n \text{ impair })$
ou encore par :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant 3 \Longrightarrow \quad (n \text{ premier } \Longrightarrow n \text{ impair }))$

2) - "Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$." : On utilise la règle du "quelque soit" ;
- "Démontrons que si n est pair, n n'est pas premier, ce qui est équivalent au résultat demandé" : On annonce que l'on va démontrer la contraposée de la proposition (n premier $\Longrightarrow n$ impair) ;
- "Supposons n pair." : On utilise la règle de l'hypothèse auxiliaire.

3) On peut compléter en disant : "par définition d'un nombre pair, n est divisible par 2. Comme $n \geqslant 3$, 2 est un diviseur de n qui est différent de 1 et de n. La définition d'un nombre premier montre que n n'est pas premier."

4) On utilise les données suivantes : "n est pair", la définition de "n pair" (qui est "n est divisible par 2"), "$n \geqslant 3$" et la définition de "n est premier" (qui est "n n'a pas de diviseur différent de 1 et de n").

5) La conclusion des deux derniers alineas est "si n est pair, n n'est pas premier".

Exercice n°2

Une démonstration correcte serait :
"Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme x est strictement positif, l'inégalité à démontrer est équivalente à l'inégalité obtenue en multipliant ses deux membres par x, c'est-à-dire : $(x^2 + 1 \geqslant 2x)$. Celle ci est encore équivalente à $(x^2 - 2x + 1 \geqslant 0)$. Or, $(x^2 - 2x + 1)$ est égal à $(x-1)^2$, qui est positif. La dernière inégalité est donc vraie et on a bien le résultat demandé."
Le raisonnement proposé comporte trois fautes :
- il néglige de préciser qui est x,
- il oublie de préciser que l'on a $x > 0$ pour valider la transformation de la première inégalité en la seconde,
- et surtout il ne démontre pas grand chose ! En effet, ce qu'il démontre est :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad ((x + 1/x) \geqslant 2 \Longrightarrow (x-1)^2 > 0)$.
Mais la proposition $((x-1)^2 > 0)$ étant vraie pour tout réel x, une implication du style $(\mathbf{P}(x) \Longrightarrow (x-1)^2 > 0)$ est vraie que $\mathbf{P}(x)$ soit vraie ou fausse.

Exercice n°3

1) On suppose que $A\Delta B = A\Delta C$; Pour montrer que $B = C$, il est équivalent de montrer que $B \subset C$ et que $C \subset B$.
Soit $x \in B$. On a soit $x \in A$, soit $x \notin A$.
Supposons que x appartienne à A ; alors $x \in A \cap B$, donc $x \notin A\Delta B$. Comme $A\Delta B = A\Delta C$ et que $(A \setminus C) \subset A\Delta C$, on a $x \notin (A \setminus C)$ et comme $x \in A$, on en déduit $x \in C$.
Dans le cas où x n'appartient pas à A, alors $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, donc $x \in A\Delta B = A\Delta C$. Or $x \notin A$; il faut donc que $x \in C \setminus A$; on obtient encore $x \in C$. On a donc montré que $B \subset C$.
Le problème étant symétrique en B et C, on prouve de même que $C \subset B$.
On en déduit que $B = C$.

2) On n'a pas utilisé les hypothèses E, A, B non vides.

Exercice n°4

La définition de f *surjective* est "pour tout y réel, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution réelle". Comme on le dit dans l'étude du premier cas, cette équation n'a pas de solution lorsque $y < 0$, par exemple pour $y = -1$. Donc f n'est pas surjective.

L'erreur est d'oublier le quantificateur "pour tout y réel", ce qui conduit à faire dépendre la surjectivité de f des valeurs de y.

Exercice n°5

La définition de "u et u' sont proportionnels" est "il existe un réel k tel que $u = k.u'$ ou il existe un réel k tel que $u' = k.u$". La définition proposée n'est pas bonne ; elle exclut le cas où u' est nul et u ne l'est pas.
Lorsqu'on écrit "c'est-à-dire tel que ($a = ka'$ et $b = kb'$)", on sous-entend "il existe un réel k tel que", et lorsqu'on dit " ce qui se traduit par", on annonce une équivalence ; mais la phrase "il existe un réel k tel que ($a = ka'$ et $b = kb'$)" n'est pas équivalente à "si $a' \neq 0$, $k = \frac{a}{a'}$ et $b = \frac{a}{a'}b'$, et si $a' = 0$, alors $a = 0$." Il ne s'agit que d'une implication et le statut de la lettre k n'est pas le même dans les deux phrases. Cette faute a probablement été commise parce qu'on a négligé le quantificateur "il existe".
Les "donc" qui suivent annoncent des implications et pas des équivalences. Il manque la démonstration de la réciproque.
Une démonstration pourrait être la suivante :
lorsque u' est nul, les vecteurs sont automatiquement proportionnels, car on a $u' = 0.u$; on a également toujours $ab' - a'b = 0$.
Supposons maintenant que u' est non nul. Alors, dire que u et u' sont proportionnels est équivalent à dire qu'il existe un réel k tel que $u = k.u'$, ou encore qu'il existe un réel k tel que ($a = ka'$ et $b = kb'$).
Supposons ceci. Soit k_0 un tel réel. Lorsque $a' = 0$, on a alors $a = k_0 \times 0 = 0$, donc $ab' - ba' = 0$. Lorsque $a' \neq 0$, on a $k_0 = \frac{a}{a'}$ et donc $b = k_0 b' = \frac{a}{a'}b'$ et $ab' - a'b = 0$.
Réciproquement, supposons $ab' - ba' = 0$. Dans le cas où $a' = 0$, on a $ab' = 0$. Or b' n'est pas nul, sinon u' serait nul ; on obtient donc $a = 0$ et si on pose $k_0 = \frac{b}{b'}k$, on a $a = k_0 a'$ et $b = k_0 b'$. Dans le cas où $a' \neq 0$, on a $b = \frac{a}{a'}b'$. Posons $k_0 = \frac{a}{a'}$. On a $a = k_0 a'$ et $b = k_0 b'$. Dans les deux cas, u et u' sont proportionnels.
Finalement, on a bien l'équivalence annoncée.
Ici, on a tenu compte du quantificateur "il existe" en utilisant la règle "nommer un objet" pour démontrer la proposition directe et en exhibant un k convenable pour la réciproque.

Exercice n°6

Suivre la méthode donnée dans le polycopié.

Exercice n°7

On suppose $b < a$. Soit $\varepsilon_0 = a - b$. Par hypothèse, ε_0 est un nombre strictement positif. On a donc en appliquant l'hypothèse faite sur a et b : $a < b + \varepsilon_0 = b + (a - b) = a$, ce qui est impossible. Donc $a \leq b$.

Exercice n°8

Non. En effet, la négation de la proposition proposée est :
$\exists (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, ($fg = 0$ et $f \neq 0$ et $g \neq 0$). Si on prend f et g définies par : $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$, $g(x) = 1$ si $x < 0$ et $g(x) = 0$ si $x \geqslant 0$, on obtient un contre-exemple, car on a $fg = 0$, $f \neq 0$ et $g \neq 0$.