Corrigé succinct du devoir du 16 décembre 2003

Exercice n°1

1) $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe $n = 1 \in \mathbb{N}$ tel que $x = n\,x$, donc $\mathscr{R}$ est réflexive.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x\,\mathscr{R}\,y$ et $y\,\mathscr{R}\,x$, alors il existe des entiers n et n' tels que $y = nx$ et $x = n'y$. On a alors $x = n\,n'\,x$.
  - Si $x = 0$, alors $y = nx = 0$; d'où $x = y$.
  - Si $x \neq 0$, alors $n\,n' = 1$, or $(n, n') \in \mathbb{N}^2$, donc $n = n' = 1$ et on obtient $x = y$.

  On a montré que $\mathscr{R}$ est antisymétrique.
- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x\,\mathscr{R}\,y$ et $y\,\mathscr{R}\,z$, alors il existe des entiers n et n' tels que $y = nx$ et $z = n'y$. On obtient alors $z = n'\,n\,x$, donc $x\,\mathscr{R}\,z$. Ainsi $\mathscr{R}$ est transitive.

2) On a $1 = 3 \times \dfrac{1}{3}$ donc $\dfrac{1}{3}\,\mathscr{R}\,1$.

Supposons que $\dfrac{2}{3}\,\mathscr{R}\,1$, alors il existe un entier naturel n tel que $1 = n \times \dfrac{2}{3}$, d'où $3 = 2n$, ce qui voudrait dire que 3 est pair. Absurde, donc on n'a pas $\dfrac{2}{3}\,\mathscr{R}\,1$.

Supposons que $1\,\mathscr{R}\,\dfrac{2}{3}$, alors il existe un entier naturel n tel que $\dfrac{2}{3} = n \times 1 = n$, or $2/3$ n'est pas un entier. Absurde, donc on n'a pas $1\,\mathscr{R}\,\dfrac{2}{3}$. Les réels 1 et $2/3$ ne sont donc pas en relation.

3) L'ordre n'est pas total car il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel qu'on n'ait ni $x\,\mathscr{R}\,y$, ni $y\,\mathscr{R}\,x$.

Exercice n°2

$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est un ensemble qui contient 9 éléments : $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$.

1-a) On obtient après calculs le tableau suivant :

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{2}\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{3}\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$

b) Un élément x de E a un symétrique s'il existe $y \in E$ tel que $xy = \overline{1}$. D'après le tableau précédent, $\overline{2}$ admet $\overline{5}$ pour symétrique et $\overline{3}$ n'a pas de symétrique.

2-a) On a $f(\overline{0}) = f(\overline{3})$ et $\overline{0} \neq \overline{3}$, donc f n'est pas injective.
D'après le tableau précédent, $f(E) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\} \neq E$ donc f n'est pas surjective. (On pouvait également dire que $\overline{1}$ n'a pas d'antécédent par f.)

b) $f^{-1}(\{\overline{6}\}) = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}$ d'où $f\big(f^{-1}(\{\overline{6}\})\big) = \{f(\overline{2}), f(\overline{5}), f(\overline{8})\} = \{\overline{6}\}$.
$f(\{\overline{6}\}) = \{\overline{0}\}$, d'où $f^{-1}\big(f(\{\overline{6}\})\big) = f^{-1}(\{\overline{0}\}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\}$.

3-a) Soit $\overline{a} \in E$. Si $\overline{x}$ est solution de $\overline{2x} = \overline{5a} + \overline{5}$, alors, en multipliant cette équation par $\overline{5}$, on obtient que $\overline{x} = \overline{25a} + \overline{25} = \overline{7a} + \overline{7}$. Réciproquement, si $\overline{x} = \overline{7a} + \overline{7}$, alors $\overline{2x} = \overline{14a} + \overline{14} = \overline{5a} + \overline{5}$. L'ensemble des solutions est donc $\{\overline{7a} + \overline{7}\}$.

b) D'après la question précédente, $\overline{2x} - \overline{5y} = \overline{5}$ est équivalente à $\overline{x} = \overline{7y} + \overline{7}$. On remplace dans la deuxième équation et on obtient $\overline{42y} + \overline{42} - \overline{3y} = \overline{3}$, c'est-à-dire $\overline{6y} + \overline{6} - \overline{3y} = \overline{3}$, d'où $\overline{3y} = \overline{6}$. La lecture du tableau donne alors trois solutions possibles pour $\overline{y}$: $\overline{2}$, $\overline{5}$ ou $\overline{8}$. Regardons si les couples obtenus sont bien solutions du système initial.

- $\overline{y} = \overline{2}$, alors $\overline{x} = \overline{7y} + \overline{7} = \overline{3}$. Les deux équations donnent $\overline{2x} - \overline{5y} = \overline{5}$ et $\overline{6x} - \overline{3y} = \overline{12} = \overline{3}$. C'est un couple solution.
- $\overline{y} = \overline{5}$, alors $\overline{x} = \overline{7y} + \overline{7} = \overline{42} = \overline{6}$. Les deux équations donnent $\overline{2x} - \overline{5y} = \overline{5}$ et $\overline{6x} - \overline{3y} = \overline{21} = \overline{3}$. C'est un couple solution.
- $\overline{y} = \overline{8}$, alors $\overline{x} = \overline{7y} + \overline{7} = \overline{63} = \overline{0}$. Les deux équations donnent $\overline{2x} - \overline{5y} = \overline{5}$ et $\overline{6x} - \overline{3y} = \overline{21} = \overline{3}$. C'est un couple solution.

L'ensemble des solutions du système est $\{(\overline{0}, \overline{8}), (\overline{6}, \overline{5}), (\overline{3}, \overline{2})\}$.

Exercice n°3

1) $u_n = \dfrac{1}{n}\dfrac{(\sin n/n^2) + 1}{1 + (1/n^3)}$, or $0 \leq |\sin n/n^2| \leq 1/n^2$ et $1/n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2) Considérons les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}).

$$v_{2n} = \frac{4n^2 + \sqrt{2n}}{8n^2 + 1} = \frac{n^2(4 + \sqrt{2}/n^{3/2})}{n^2(8 + 1/n^2)} = \frac{4 + \sqrt{2}/n^{3/2}}{8 + 1/n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} 1/n^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} 1/n^{3/2} = 0$.

$$v_{2n+1} = \frac{-(2n+1)^2 + \sqrt{2n+1}}{2(2n+1)^2 + 1}.$$

On montre, de même, que $v_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.

On a donc construit deux suites extraites de (v_n) convergentes mais n'ayant pas la même limite ; on en déduit que la suite (v_n) est divergente.

Exercice n°4

1-a) Par définition de la division euclidienne, on trouve $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$, $u_5 = 2$ et $u_6 = 0$.

b) Considérons la suite (u_{3n}) extraite de (u_n) ; comme $3n = 3 \times n + 0$, le reste de la division euclidienne de $3n$ par 3 est 0 pour tout entier n. On en déduit que, pour tout entier n, $u_{3n} = 0$ et la suite (u_{3n}) tend vers 0.

Considérons la suite (u_{3n+1}) extraite de (u_n) ; comme $3n+1 = 3\times n+1$, le reste de la division euclidienne de $3n+1$ par 3 est 1 pour tout entier n. On en déduit que, pour tout entier n, $u_{3n+1} = 1$ et la suite (u_{3n+1}) tend vers 1.

On a donc construit deux suites extraites de (u_n) convergentes mais n'ayant pas la même limite ; on en déduit que la suite (u_n) est divergente.

2-a) Par définition de la division euclidienne, on trouve $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, $v_3 = 0$, $v_4 = 3$, $v_5 = 3$ et $v_6 = 3$.

b) Le reste r de la division euclidienne de 3 par n vérifie $0 \leq r < n$, or $3 = 0 \times n + 3$. On en déduit que, si $n \geq 4$, $r = 3$ et $v_n = 3$. La suite (v_n) est donc constante à partir du rang 4, elle converge vers cette valeur donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Exercice n°5

1) Posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ alors

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$
$$w_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+1}} + \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \geq 0 \\
w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+4}}{\sqrt{2n+3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \leq 0 \\
w_n - v_n &= \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

On a donc (v_n) croissante, (w_n) décroissante et la différence des deux suites tend vers 0. On en déduit que les suites sont adjacentes.

2) Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite. On a donc montré que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}.$$

On en déduit que la suite (u_n) converge.