Chapitre 4

Applications

1. Définitions et exemples

Définition 4.1 – *Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F est un "procédé" qui permet d'associer à chaque élément x de E un unique élément y de F ; cet élément y est alors noté $y = f(x)$, on l'appelle* **l'***image de x et on dit que x est* **un** *antécédent de y par f. On dit que E est l'ensemble de départ ou ensemble source de f et que F est l'ensemble d'arrivée ou ensemble but de f.*

On note $f : E \longrightarrow F$ ou $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. L'ensemble $G = \{(x,y) \in E \times F \,|\, y = f(x)\}$ est appelé le graphe de f.

Exemples - • On définit une application f en prenant : $E = \{1,2,3\}, F = \{1,2,3,4\}$, $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 4$. Alors, l'image de 3 est 4 et 1 a deux antécédents : 1 et 2.

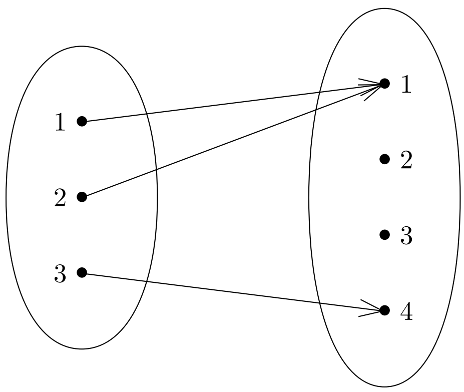


Diagramme sagittal

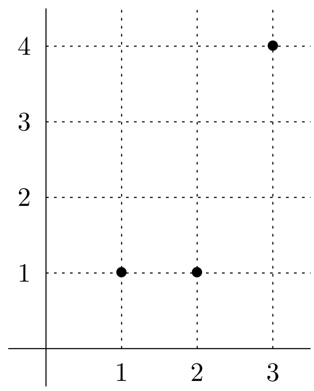


Diagramme cartésien

• L'application Logarithme : $\ln : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$

• L'application : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y, x-y+z, y+5z) \end{array}$

• L'application appelée "première projection" ou "première coordonnée" : $p_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

• L'application "identité" : $Id_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Contre-exemples - Les énoncés suivants sont faux ou incomplets (pourquoi ?) :

- *"L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui associe à chaque z de $\mathbb{C}$ une de ses racines carrées complexes".*
- *"L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$".*
- *"L'application f définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(x) = x^2$"*

Remarques - • On note souvent $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
• On parle plus généralement de fonctions : une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F associe à chaque élément x de E un élément de F *au plus*; l'ensemble des éléments x de E auxquels elle associe un élément y de F est appelé le domaine de définition de la fonction f et noté D_f. Si x appartient à D_f, l'élément y qui lui est associé est noté $y = f(x)$. On peut alors construire l'application (encore notée f par abus de langage), $f : \begin{array}{rcl} D_f & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et c'est elle qu'on étudie en fait. Par exemple, si on parle de "la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x) = 1/x$", on a $D_f = \mathbb{R}^*$, et on étudie l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$.

Exercice - *Soient E et F deux ensembles finis non vides ayant respectivement n et m éléments. Montrer (par récurrence sur n par exemple) qu'il y a m^n applications de E dans F.*

---

2. Egalité - Restriction - Prolongement

Définition 4.2 – *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $f_1 : E' \longrightarrow F'$ deux applications. On dit qu'elles sont égales et on note $f = f_1$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

$$E = E',\ F = F' \text{ et } \forall x \in E,\ f(x) = f_1(x).$$

Exemples - • Soient $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ et $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\cos^2(x/2) - 1 \end{array}$ Alors, on a $f = f_1$.
• Si on considère $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, on obtient trois applications deux à deux distinctes.

Définition 4.3 – *Soient E et F deux ensembles, E_1 un sous-ensemble de E, $f : E \longrightarrow F$ et $f_1 : E_1 \longrightarrow F$. On suppose que pour tout élément x de E_1, on a $f(x) = f_1(x)$. Alors, on dit que f_1 est* **la** *restriction de f à E_1 et que f est* **un** *prolongement de f_1 à E. On note $f_1 = f|_{E_1}$.*

Exemple - Dans le deuxième exemple ci-dessus, h est la restriction de f à $\mathbb{R}_+$, et f est un prolongement de h à $\mathbb{R}$. Mais l'application $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que ($\forall x \in \mathbb{R}_+$, $k(x) = x^2$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$ $k(x) = 0$) est un autre prolongement de h. (Dessiner et comparer les graphes de ces trois applications).

Remarque - Lorsque f est une application de E dans F et F_1 un sous-ensemble de F tel que pour tout élément x de E l'élément $f(x)$ appartienne à F_1, on considère souvent l'application $g : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F_1 \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. C'est le cas dans le deuxième exemple pour les applications f et g, si on prend $F_1 = \mathbb{R}_+$.

Exercice - *Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = 1$ pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2$ pour tout x tel que $x > 1$. Trouver deux prolongements distincts de f à $\mathbb{R}$. Quelle est la restriction de f à $[0, 1]$? Trouver une application g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = f(x)$.*

---

3. Composition des applications

Définition 4.4 – *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit une application de E dans G notée $g \circ f$ en posant*

$$\forall x \in E,\, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

On l'appelle application composée de g et f.

Remarques - • Soients f et g deux éléments de $\mathcal{F}(E,E)$; les deux applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies, mais en général elles ne sont pas égales. Par exemple, si on a $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \end{array}$, on obtient $g \circ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x^2 \end{array}$ et $f \circ g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 4x^2 \end{array}$ et ces deux applications sont différentes (prouvez le).
• On a $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$ (lorsque cela a un sens).
• Soient f et g deux applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F_1 \longrightarrow G$ où F_1 est un sous-ensemble de F tel que pour tout $x \in E$, $f(x)$ appartienne à F_1 ; soit $f_1 : \begin{array}{l} E \longrightarrow F_1 \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$. L'application $g \circ f_1$ est souvent encore notée $g \circ f$ par abus de langage.

Exercice - 1°) Soit $E = \{1,2,3\}$, $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ les applications définies par $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$. *Calculer $f \circ f$, $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?*
2°) Dans le plan (affine euclidien orienté), on considère un (vrai) triangle OAB et f et g les symétries orthogonales par rapport à OA et OB respectivement. Calculer et comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

---

4. Familles

Une application u de $\mathbb{N}$ dans un ensemble E est souvent notée $u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow E \\ n \longmapsto u_n \end{array}$ plutôt que $u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow E \\ n \longmapsto u(n) \end{array}$. On parle alors de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E. Plus généralement, si u est une application d'un ensemble I dans E, on la note parfois $u : \begin{array}{l} I \longrightarrow E \\ i \longmapsto u_i \end{array}$ et on parle alors de la famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexée par I. Lorsque E est l'ensemble des parties d'un ensemble X, on obtient ainsi des familles $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de X.
On peut alors généraliser les notions de réunion, d'intersection et de partition. De façon naturelle, on définit :

- La réunion de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des éléments x de X qui appartiennent à l'un des ensembles A_i au moins :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

- L'intersection de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des éléments x de X qui appartiennent à tous les ensembles A_i :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\}$$

- La famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de X forme une partition de X si
$$X = \bigcup_{i\in I} A_i$$
$$\forall i, j \in I,\ (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$$
$$\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$$

Exemple - Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [n, n+1[$. Alors, la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une partition de $[0, +\infty[$.

Exercice - 1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = [2^n, 2^{n+1}[$. Calculer la réunion $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Que peut-on dire de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2°) Calculer $\bigcup_{x\in]0,\,1/2[}]x-1,\, x+1[$ et $\bigcap_{x\in]0,\,1/2[}]x-1,\, x+1[$.

---

5. Bijection - Injection - Surjection

Proposition et définition 4.5 – *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*
1 – On dit que f est une surjection ou que f est surjective si chaque élément y de F est l'image d'un élément de E au moins, c'est-à-dire si pour chaque élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution dans E, ce qui s'écrit :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$
2 – On dit que f est une injection ou que f est injective si la proposition suivante est vraie :
$$\forall (x, x') \in E^2,\ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x').$$
c'est-à-dire si chaque élément y de F est l'image d'un élément de E au plus, ou encore, si pour chaque élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution dans E.
3 – On dit que f est une bijection ou que f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.
Démonstration : on va démontrer l'équivalence concernant l'injectivité.

1) Supposons que tout élément de F admette au plus un antécédent par f. Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Posons $y = f(x)$. C'est un élément de F qui admet x et x' pour antécédents. Or y a au plus un antécédent. Donc $x = x'$. On a montré que, si tout élément de F a au plus un antécédent par f, l'application f est injective.
2) Supposons qu'il existe un élément de F qui n'admette pas au plus un antécédent par f. Notons y un de ces éléments. y a (au moins) deux antécédents distincts x et x'. Par définition d'un antécédent, on a $f(x) = f(x') = y$. On a donc $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. On a montré $\exists (x, x') \in E^2$, $(x \neq x'$ et $f(x) = f(x'))$, c'est-à-dire la négation de "$\forall (x, x') \in E^2$, $(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$," c'est-à-dire que f n'est pas injective. On a donc montré l'implication réciproque par contraposée. □

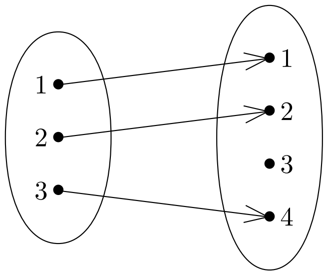
Remarques - • L'écriture avec les quantificateurs est souvent plus commode pour montrer qu'une application est injective.
• L'expression "au plus" signifie qu'un élément de F soit n'a pas d'antécédent, soit en a un.

Exemples - • L'application $l : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$ est bijective : pour chaque réel y, il existe un et un seul réel x tel que $y = x^3$.

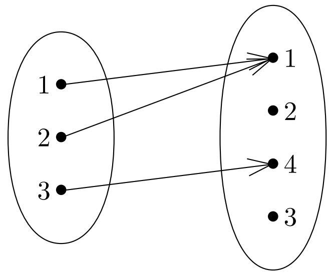
• L'application $u : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \mid x \mid \end{cases}$ est surjective car tout élément y de $\mathbb{R}^+$ est égal à sa valeur absolue donc a au moins un antécédent par u. u n'est pas injective car $u(1) = u(-1)$ et $1 \neq -1$.

• L'application $v : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp(x) \end{cases}$ n'est pas surjective : les réels négatifs n'ont aucun antécédent. v est injective car, si on a $v(x) = v(x')$, i.e. $\exp(x) = \exp(x')$, alors en composant avec le logarithme, on obtient $x = x'$.

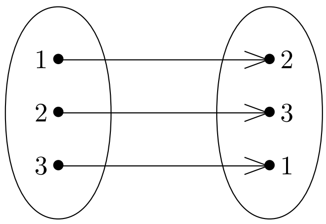
• Considérons les quatre applications dont les graphes sont donnés ci-dessous :



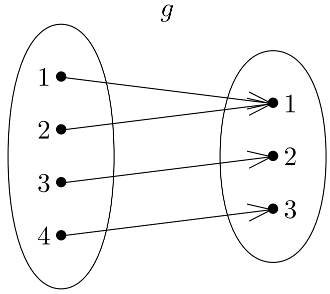
f



g



h



k

L'application f est injective et pas surjective, g n'est ni injective, ni surjective, h est bijective, k est surjective et pas injective. (Pourquoi ?)

Proposition 4.6 – *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application f est bijective si chaque élément y de F est l'image d'un élément x de E et d'un seul, c'est-à-dire si pour chaque élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a une solution x et une seule dans E, ce qui s'écrit :*

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$$

Remarques - Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

• Pour montrer que f n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$.

• Pour montrer que f n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément y de F qui n'a aucun antécédent.

Exemples - • Soit v l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $v(x) = x^2 - 3x$. Montrons que v est injective. Soient x et x' deux éléments de $[0,1]$. Supposons $v(x) = v(x')$. On a donc $(x - x')(x + x' - 3) = 0$, d'où $x = x'$ ou $x + x' - 3 = 0$. Mais comme x et x' sont inférieurs à 1, on a $x + x' \leq 2$ et on ne peut avoir $x + x' = 3$. Donc, on a $x = x'$. On a montré $(\forall x, x' \in E,\ (v(x) = v(x') \Longrightarrow x = x'))$, donc v est injective. Mais v n'est pas surjective. En effet, si x appartient à $[0,1]$, on a $x(x-3) \leq 0$ donc $f(x) \leq 0$; si y est un réel strictement positif, l'équation $y = f(x)$ n'a aucune solution dans $[0,1]$.

• Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ l'application telle que $u(x) = 0$ si $x < -1$ et $u(x) = x+1$ si $x \geqslant -1$. Les réels -1 et -2 sont distincts et ont la même image : $u(-1) = u(-2) = 0$. Donc u n'est pas injective. Montrons que u est surjective. Soit y un réel positif. On veut montrer qu'il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}$ tel que $y = u(x)$. Posons $x = y - 1$. On a alors $x \geqslant -1$ et $y = x + 1$, donc $y = u(x)$. On a donc montré que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = u(x)$, c'est-à-dire que u est surjective.

Exercice - 1°) L'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

2°) Soient E et F deux ensembles finis ayant respectivement n et m éléments et f une application de E dans F. On suppose que f est injective ; comparer n et m. Même question lorsque f est surjective, lorsque f est bijective.

---

6. Etude des bijections

Définition 4.7 – *Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. Alors, l'application de F dans E qui à chaque élément y de F associe l'unique élément x de E solution de l'équation $y = f(x)$ est appelée application réciproque de f et notée f^{-1}.*

Remarque - Si f est bijective, $x \in E$ et $y \in F$, il est équivalent de dire "x est un antécédent de y pour f", "$y = f(x)$", "$x = f^{-1}(y)$" ou "y est un antécédent de x pour f^{-1}".

Exemples - • Soit h l'application de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 5, 7\}$ telle que $h(1) = 5, h(2) = 1$ et $h(3) = 7$; elle est bijective. Sa réciproque h^{-1} est l'application de $\{1, 5, 7\}$ dans $\{1, 2, 3\}$ donnée par $h^{-1}(1) = 2$, $h^{-1}(5) = 1$, $h^{-1}(7) = 3$.

• Considérons la bijection $l : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$. L'application réciproque de l est $l^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{array}$.

Exercice - 1°) Montrer que l'application $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 1 \end{array}$ *est bijective et déterminer h^{-1}.*

2°) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 2x$ si $x \in [0, 1/2]$, $f(x) = 1$ si $x > 1/2$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Trouver une restriction de f qui soit injective. Est-elle bijective ? Trouver une bijection g d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ sur un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$. Déterminer g^{-1}.

Proposition 4.8 – *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Alors*

1) f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$,
2) $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$

Démonstration :

1) Soit x un élément de E. On considère l'équation $x = f^{-1}(y)$ (dans laquelle l'inconnue est y et la donnée x). On veut montrer que cette équation a une solution dans F et une seule. Par définition de f^{-1}, cette équation équivaut à l'équation $y = f(x)$. Elle a donc une seule solution et c'est $f(x)$, d'où le résultat.
2) Il faut montrer que $f^{-1} \circ f$ est une application de E dans E et que pour tout $x \in E$, $f^{-1} \circ f(x) = x$. Or on a $f : E \longrightarrow F$ et $f^{-1} : F \longrightarrow E$, donc $f^{-1} \circ f : E \longrightarrow E$. D'autre

part, soit x appartenant à E, et posons $y = f(x)$; on a alors $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x$ par définition de f^{-1}. D'où $f^{-1} \circ f = Id_E$.
On fait de même pour montrer que $f \circ f^{-1} = Id_F$. □

La propriété 2 de la proposition précédente caractérise l'application réciproque f^{-1}. On a en effet la proposition suivante :

Proposition 4.9 – *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Alors, f et g sont bijectives, $g = f^{-1}$ et $f = g^{-1}$.*

Démonstration : Montrons que f est bijective. Soit y un élément de F. On veut montrer que l'équation $y = f(x)$ (où x est l'inconnue, y la donnée) a une et une seule solution dans E. Si x est solution, on a $g(y) = g \circ f(x)$ et comme $g \circ f = Id_E$, on a $x = g(y)$; inversement, si $x = g(y)$, x appartient à E et $f(x) = f \circ g(y)$; comme $f \circ g = Id_F$, on a $f(x) = y$, donc x est solution. Il y a une solution et une seule et c'est $g(y)$. De tout ceci, on déduit que f est bijective et $g = f^{-1}$. Le reste de la proposition est une conséquence de la proposition précédente. □

Remarques - • La proposition ci-dessus donne un autre moyen de montrer qu'une application f est bijective. On "devine" en effet parfois l'application réciproque. Il suffit en la notant g de vérifier qu'elle satisfait aux deux conditions $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Soit par exemple l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(2n) = 2n + 1$ et $f(2n + 1) = 2n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est évident que $f \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ et donc f est bijective et égale à son application réciproque.

• On peut voir une bijection comme un "codage". Par exemple, les informaticiens codent les entiers compris entre 0 et $2^{31} - 1$ par des suites $s = (s_0, s_1, \ldots, s_{30})$ de 0 et de 1. On peut justifier cela de la façon suivante : on considère l'ensemble S de toutes les suites s de cette forme et l'ensemble E de tous les entiers compris entre 0 et $2^{31} - 1$; si $s \in S$, l'entier $n = \sum_{i=0}^{30} 2^i s_i$ est dans E (pourquoi ?). On peut donc construire l'application $f : S \longrightarrow E$ qui à $s \in S$ associe cet entier n. On vérifie que f est bijective (on le prouve avec un raisonnement par récurrence et la division euclidienne que vous verrez dans la cours d'arithmétique) ; l'application inverse f^{-1} associe à chaque entier $n \in E$ une suite s qu'on appelle sa représentation en numération binaire. Il est équivalent de se donner l'entier n ou la suite s. Par exemple $11 = 1 + 2 + 2^3 = f(1, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, donc $f^{-1}(11) = (1, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

• Si f est seulement injective, la situation est moins bonne. Il y a des éléments de F qui ne correspondent à aucun x. On peut cependant construire une bijection, en modifiant l'ensemble d'arrivée. Par exemple, chaque étudiant e se voit attribuer un numéro d'inscription $N(e)$ à son entrée à l'université Rennes 1. En notant E l'ensemble des étudiants inscrits, on peut construire l'application $N : \begin{array}{c} E \longrightarrow \mathbb{N} \\ e \longmapsto N(e) \end{array}$. Elle est injective et pas surjective. Un numéro attribué permet de retrouver l'étudiant correspondant, mais tous les entiers ne sont pas des numéros attribués. Si on note M l'ensemble des numéros attribués et N' l'application $N' : \begin{array}{c} E \longrightarrow M \\ e \longmapsto N(e) \end{array}$, alors N' est bijective.

7. Image directe ou réciproque

On fixe toujours une application $f : E \longrightarrow F$.

Définition 4.10 – *Soit B un sous-ensemble de F. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble des éléments x de E dont l'image $f(x)$ par f est dans B. C'est un sous-ensemble de E ; on le note $f^{-1}(B)$. On a donc pour tout élément x de E :*

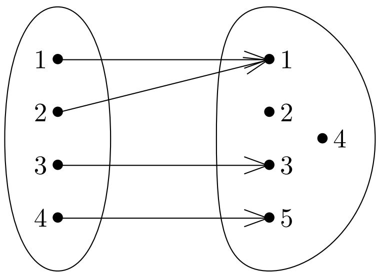
$$x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$$

Définition 4.11 – *Soit A un sous-ensemble de E. On appelle image directe de A par f l'ensemble des images $f(x)$ des éléments x de A. C'est un sous-ensemble de F ; on le note $f(A)$. On a donc pour tout élément y de F :*

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A,\, y = f(x).$$

L'ensemble $f(E)$ est aussi appelé l'image de f.

Exemple - Considérons l'exemple de la figure ci-dessous



On a $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$,
$f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{1,2,4\}) = \{1,2\}$,
$f(\{1,4\}) = \{1,5\}$ et l'image de f est $f(\{1,2,3,4\}) = \{1,3,5\}$.

Exercice - 1°) Dans l'exemple de la figure précédente, calculer $f^{-1}(\{1,2,5\})$ et $f(\{2,3\})$.

2°) Soit $g : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array}$. Calculer $g^{-1}(\{-1,1\})$, l'image de g et $g([0, 3\pi/2])$.

3°) Les applications f, g, h, k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, $k(x) = |x|$ pour x réel sont-elles injectives, surjective, bijectives ? Pour chacune de ces applications donner son image, l'image réciproque de $\mathbb{R}_-$ et celle de $\{1\}$.

Remarques sur les notations - Il faut être très prudent avec la notation f^{-1}, qui n'est pas très heureuse.

⚠ Supposons que f soit bijective. Les deux applications f et f^{-1} sont alors définies et la notation $f^{-1}(B)$ désigne a priori deux ensembles distincts : l'image réciproque de B par f et l'image directe de B par f^{-1}. Mais si $x \in E$, dire que $f(x) \in B$ équivaut à dire qu'il existe $y \in B$ tel que $f^{-1}(y) = x$. Ces deux ensembles sont donc égaux et la notation est sans ambiguïté. Mais, lorsque l'on utilise la notation $f^{-1}(B)$, on ne suppose pas que l'application f^{-1} est définie : l'application f *n'est pas forcément bijective.*

⚠ L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y par f. Lorsque f est bijective, cet ensemble a un et un seul élément $f^{-1}(y)$; et on a donc alors $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$ (comprenez vous la différence de notation entre les deux membres ?) Dans le cas général, c'est un *ensemble* qui peut avoir 0,1 ou plusieurs éléments (trouvez-en des exemples sur la figure précédente). L'usage est malheureusement de noter plus simplement $f^{-1}(y)$ au lieu de $f^{-1}(\{y\})$, ce qui n'aide pas les débutants... Astreignez-vous donc au moins au début, à mettre toutes les accolades nécessaires.

Proposition 4.12 – *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors, elle est surjective si et seulement si son image $f(E)$ est égale à l'ensemble d'arrivée F.*

Remarque - Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est surjective, on peut classer les éléments x de E suivant le "caractère" f. En effet, pour $y \in F$, notons $E_y = f^{-1}(\{y\})$. La famille $(E_y)_{y \in F}$ forme une partition de E. (Pourquoi ?) Si par exemple, f est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$ telle que $f(2n) = 0$ et $f(2n+1) = 1$, alors f permet de classer les entiers en pairs et impairs. Qu'obtient-on si f est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$ qui associe à chaque réel x sa partie entière $[x]$?

8. Compléments

Il y a plusieurs théorèmes que vous rencontrerez cette année, qui sont parfois bien utiles pour montrer qu'une application est bijective. En voici quelques uns que vous pourrez utiliser, à *condition évidemment de vérifier leurs hypothèses.*

Théorème 4.13 – *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f continue et strictement croissante. Alors :*

1) f est injective.
2) L'image de f est l'ensemble $[f(a), f(b)]$.
3) L'application f définit (par restriction de l'ensemble d'arrivée) une application g : $\begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & [f(a), f(b)] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ *et cette application g est bijective.*

On a des théorèmes analogues pour f strictement décroissante ou pour un intervalle I quelconque.

⚠ Une application bijective de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$ est-elle forcément monotone ? Fabriquez un contre-exemple.

Théorème 4.14 – *Soient E et F deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments et une application $f : E \longrightarrow F$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) f est bijective
2) f est injective
3) f est surjective

⚠ Le résultat est-il vérifié pour les applications suivantes ? Pourquoi ?

1) $\begin{array}{rcl} \{1,2\} & \longrightarrow & \{1,4,6\} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

2) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

3) $\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

Enfin ce théorème que vous étudierez en MA3 :

Théorème 4.15 – *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement d'un espace vectoriel E de dimension finie dans un espace vectoriel F de même dimension). Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) f est bijective
2) f est injective
3) f est surjective

EXERCICES D'APPLICATION

$\boxed{\text{Exercice n°1}}$

Déterminer toutes les applications h de $E = \{0,1,2,3,4\}$ dans lui-même telles que pour tout x et tout y de E, on ait $h(x+y) = h(x) + h(y)$.

$\boxed{\text{Exercice n°2}}$

On définit deux fonctions f et g sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 - x \text{ si } x \in [0,1/2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1/2[\\ x - 1/2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ?

$\boxed{\text{Exercice n°3}}$

Soient F un ensemble, E un sous-ensemble de F et f l'injection canonique de E dans F ($f(x) = x$ pour tout x de E). A quelle condition existe-t-il une application h de F dans E telle que $f \circ h = Id_F$?

$\boxed{\text{Exercice n°4}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [1/(n+1), 1/n[$. Calculer $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et montrer que la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forme une partition de E.

$\boxed{\text{Exercice n°5}}$

Soient a et b deux nombres rationnels et f l'application de l'ensemble des nombres rationnels dans lui-même qui à chaque rationnel x associe $f(x) = a\,x + b$. Cette application est-elle injective, surjective ?

$\boxed{\text{Exercice n°6}}$

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par $f(x) = x/(1+|x|)$. Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

$\boxed{\text{Exercice n°7}}$

Soit f l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}. \\ z \longmapsto 1 + z^2 \end{array}$

1) Montrer que f est surjective.
2) L'application f est-elle injective ?
3) Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par l'application f.

$\boxed{\text{Exercice n°8}}$

Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans lui-même définie par $f(x) = x^2 - x$.

1-a) Montrer que f n'est pas injective.
  b) Calculer les valeurs de $f(n)/2$ pour $n \in \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 6\}$. Que remarquez-vous ?
  c) Montrer que la restriction de f à $\mathbb{N}^*$ est injective.

2) Soit h l'application de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $h(x,y) = f(x) + f(y)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
  a) Montrer que l'image de h est un sous-ensemble de l'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs. L'application h est-elle surjective ?
  b) La restriction de h à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est-elle injective ?

Exercice n°9

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E et f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (A \cap X, B \cap X)$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit injective, surjective, bijective. Expliciter f^{-1} lorsque f est bijective.

Exercice n°10

Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1) Montrer que si h est injective, f l'est aussi et que si h est surjective, g l'est aussi.
2) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.
3) Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

INDICATIONS ET SOLUTIONS SOMMAIRES

Exercice n°1

Il faut $h(n) = nh(1)$ pour tout $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Les solutions sont $h = 0$ et $h = Id$.

Exercice n°2

$(f \circ g)(x) = 1/2$ si $x \in [0, 1/2[$, $(f \circ g)(x) = 1 - x$ sinon, $g \circ f = 0$.
Les deux applications sont distinctes.

Exercice n°3

Il faut $E = F$ et dans ce cas, il existe une et une seule solution $h = Id_E$.

Exercice n°4

$E =]0, 1[$.

Exercice n°5

Si $a \neq 0$, f est bijective. Sinon, f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice n°6

Pour montrer que f est bien définie, vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in]-1, 1[)$. Remarquer que x et $f(x)$ ont même signe. Si $y \in]-1, 1[$, l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution $y/(1 - |y|)$. Donc f est bijective et $f^{-1}(y) = y/(1 - |y|)$.

Exercice n°7

Soit $u \in \mathbb{C}$. L'équation $u = f(z)$ a deux solutions complexes distinctes si $u \neq 1$ et une seule si $u = 1$.

1) Donc f est surjective,
2) et f n'est pas injective
3) $f(\mathbb{R}) = \{u \in \mathbb{R} \mid u \geqslant 1\}$.

Exercice n°8

1-a) $f(0) = f(1) = 0$ et $0 \neq 1$.
b) On trouve $0, 1, 3, 6, 10, 15$. On voit que $f(n)/2$ est la somme des $n-1$ premiers nombres entiers.
c) La restriction de f à $\mathbb{N}^*$ est strictement croissante, donc injective.

2) Pour n entier, n ou $n-1$ est pair, donc $f(n) = n(n-1)$ est pair, donc h prend ses valeurs dans $2\mathbb{Z}$. Mais par exemple, 10 n'a aucun antécédent (voir que les valeurs prises par f sont $0, 2, 6, 12, \ldots$) ; donc h n'est pas surjective.

3) non : $h(1,4) = h(3,3) = 12$ et $(1,4) \neq (3,3)$.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 9}$

L'application f est injective ssi $A \cup B = E$, surjective ssi $A \cap B = \emptyset$, f bijective ssi A et B forment une partition de E. Dans ce cas, $f^{-1}(C, D) = C \cup D$.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 10}$

1) Appliquer les définitions.
2) Déduire de la question 1 que g est bijective et écrire $f = g^{-1} \circ h$.
3) Déduire de la question 1 que f est bijective et écrire $g = h \circ f^{-1}$.