Université de Rennes 1 — DEUG1 MIAS - MASS
UFR Mathématiques — UE 3 - MA2
Feuille de TD n°7 — Année 2002-2003

1) "Liens" entre nombres réels et nombres rationnels

Exercice n°1

Pour cet exercice, on admettra la proposition 7.9 du polycopié.

1) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel. (On pose $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers, fraction "simplifiée".)

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, non nul, $\frac{\sqrt{5}}{n}$ n'est pas rationnel.

En utilisant le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, en déduire qu'entre deux rationnels distincts x et y (prendre $\varepsilon = |x-y|$), il y a toujours un rationnel et un irrationnel. Puis, qu'entre deux réels distincts x et y, il y a toujours un rationnel et un irrationnel.

2) Une suite de rationnels a-t-elle toujours pour limite un rationnel ?

3) Une suite d'irrationnels peut-elle tendre vers un rationnel ?

2) Inégalités, majorations, minorations et quantificateurs

Exercice n°2

On suppose que $|x-1| \leq 2$ et $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les quantités suivantes :

1) $x + y$ 2) $x - y$ 3) xy 4) $\frac{x}{y}$ 4) $|x| - |y|$

Exercice n°3

Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément :

$E_1 = [0, 3[$ $E_2 = \{0\} \cup]1, 2[$

Exercice n°4

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les porpriétés suivantes et leur négation :

1) 10 est un majorant de A et 5 un minorant de A.

2) A est majoré.

3) A est minoré.

4) A est borné.

5) M est la borne supérieure de A.

$\boxed{\text{Exercice n°5}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Montrer que

1) $(\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq |x-y| \leq \varepsilon) \Longrightarrow x = y$;

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq |x-y| \leq \dfrac{1}{n}) \Longrightarrow x = y$.

$\boxed{\text{Exercice n°6}}$

Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{5n+2}$.
pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, trouver un entier N_p tel que, pour tout $n \geq N_p$, on ait $|u_n - \ell| < 10^{-p}$. Donner une valeur approchée de ℓ avec 4 décimales exactes. La convergence vers ℓ est-elle rapide ?

3) Exercices de base

$\boxed{\text{Exercice n°7}}$

Etudier la convergence des suites (on pourra pour certaines suites convergentes, préciser un N en fonction du ε) :

a) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ b) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}$ c) $u_n = \dfrac{2n^3+1}{3n^2+5}$

d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e) $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + \sin n}$

g) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n + \ln n}$ h) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $a > 0$ et $b > 0$

$\boxed{\text{Exercice n°8}}$

En simplifiant le terme général u_n, étudier la convergence des suites :

$$a)\ u_n = \prod_{p=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \qquad b)\ u_n = \prod_{p=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$\boxed{\text{Exercice n°9}}$

Calculer la limite de la suite

$$u_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}.$$

$\boxed{\text{Exercice n°10}}$

Etudier la convergence des suites :

$$a)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \qquad b)\ u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+i}} \qquad c)\ u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!.$$

$\boxed{\text{Exercice n°11}}$

1) Ecrire le développement décimal de $\dfrac{27}{11}$ et de $\dfrac{27}{13}$.

2) Quelle est la propriété commune des deux développements ?
Le développement de tout rationnel possède-t-il cette propriété ? Le démontrer.

3) Ecrire sous la forme d'un rationnel $\dfrac{p}{q}$ les nombres réels suivants définis comme limite de suite. *(La barre au-dessus de la suite de chiffres indique que cette suite se répète indéfiniment)* :

$$0,\overline{3}, \qquad 0,\overline{27}, \qquad 7,5\overline{123}.$$

$\boxed{\text{Exercice n°12}}$

Soit $a > 0$, déterminer la limite des suites

$$1)\ u_n = \ln\left(\frac{n+a}{1+na}\right) \qquad 2)\ \ u_n = \text{Arctan}\left(\frac{n+a}{1+na}\right)$$

$\boxed{\text{Exercice n°13}}$

Etudier la convergence des suites :
Attention : *revoir la définition de* a^b *pour* $a > 0$ *et* $b \in \mathbb{R}$

1) $u_n = \sqrt[n]{n}$

2) $u_n = \sqrt[n]{\ln(n)}$

3) $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$

Exercice n°14

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$ et soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

4) Suites définies par récurrence

Exercice n°15

Etudier, suivant les valeurs de a et b réels, les suites vérifiant, pour tout entier $n \geq 0$, avec $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Exercice n°16

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in [0, \pi]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout entier $n \geq 0$, montrer que la suite est décroissante. En déduire que $\lim u_n = 0$.

5) Exercices pour faire le point

Exercice n°17

Chacun des énoncés suivants est-il vrai ou faux ?
S'il est vrai, le démontrer ; s'il est faux, donner un contre-exemple.

1) Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.

2) Si une suite est croissante, majorée par ℓ, elle converge vers ℓ.

3) Toute suite bornée est convergente.

4) Si une suite n'est pas majorée, elle est bornée.

5) Si une suite est convergente, elle est soit croissante majorée, soit décroissante minorée.

6) Toute suite convergente est bornée.

6) Suites adjacentes

Exercice n°18

On considère les suites de termes généraux

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice n°19

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

7) Suites et borne supérieure, borne inférieure

Exercice n°20

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A, on suppsoe qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers M. Montrer que $m = \sup(A)$.

Exercice n°21

L'ensemble suivant a-t-il une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément ?
$$E = \left\{1 + \frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice n°22

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble
$$\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

8) Suites extraites

Exercice n°23

Les suites suivantes convergent-elles ?
Indication : chercher des suites extraites de la suite (u_n) convergeant vers des limites différentes.

1) $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$

2) $v_n = \dfrac{2n + 1 + (-1)^n n}{n}$

3) $w_n = \dfrac{1}{2 + n^{(-1)^n}}$

$\boxed{\textbf{Exercice n}^\circ\textbf{24}}$

Soit (u_n) une suite de nombres réles ou complexes telle que les suites (u_{2n}), $(u_{2n+1}$ et (u_{3n}) soient convergentes. Montrer que (u_n) converge.
Que se passe-t-il si l'on suppose seulement (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergentes ? (voir exercice 22)

9) Suites de Cauchy

$\boxed{\textbf{Exercice n}^\circ\textbf{25}}$

Montrer que toute suite (u_n) vérifiant pour tout entier $n \geq 0$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq 2^{-n}$$

est convergente.