Université de Rennes 1 | DEUG1 MIAS - MASS
UFR Mathématiques | UE 3 - MA2
Feuille de TD n°1 | Année 2002-2003

Exercice n°1

Représenter les complémentaires de A et de B dans E, ainsi que $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ et $A \Delta B$ lorsque

1) $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in E \mid x^2 + 2x - 1 < 0\}$ et $B = \mathbb{Z}$.

2) $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \in E \mid x^2 + y^2 - 1 < 0\}$ et $B = \{(x, y) \in E \mid x^2 + y^2 + 2x < 0\}$.

3) E est le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, A la droite d'équation $y = 2x + 3$ et B la droite d'équation $4x - 2y = 0$.

Exercice n°2

Soit E un ensemble non vide et A, B et C trois sous-ensembles de E.
Dans quel cas a-t-on $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$?

Exercice n°3

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Sinon, donner un contre-exemple)
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ et $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$.

Exercice n°4

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que B est un sous-ensemble de C.

Exercice n°5

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes

1) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c)$ où A^c est le complémentaire de A dans E.

2) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$.

3) $[(A^c \cup C^c) \cap (B^c \cup C^c)] \cup [(A \cup B) \cap C]$

Exercice n°6

Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer les égalités
$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ et $E = (A \Delta B) \cup (A \Delta B^c)$.

Exercice n°7

1) Montrer que, si A, B et C sont des sous-ensembles d'un ensemble E, on a :

  a) $(A \Delta B) \Delta C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

  b) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$.

2) Etudier la commutativité et l'associativité de la loi Δ ainsi que la distributivité de l'intersection par rapport à Δ.

$\boxed{\text{Exercice n°8}}$

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

1) On suppose $B \subset A$. Déterminer tous les sous-ensembles X de E tels que $A \cap X = B$.

2) Que se passe-t-il si l'on supprime l'hypothèse $B \subset A$?

3) Etudier de même les sous-ensembles Y de E tels que $A \cup Y = B$.

$\boxed{\text{Exercice n°9}}$

On appelle fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble E, l'application e_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par : $e_A(x) = 0$ si $x \notin A$ et $e_A(x) = 1$ si $x \in A$.
Soient A, B, C des sous-ensembles de E.

1) Montrer que $A = B$ si et seulement si $e_A = e_B$.

2) Exprimer les fonctions caractéristiques de A^c, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $A \Delta B$ en fonction de e_A et e_B.

3) Retrouver ainsi l'égalité $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

4) Donner en fonction de e_A, e_B et e_C une condition nécessaire et suffisante pour que A, B et C forment une partition de E.

$\boxed{\text{Exercice n°10}}$

Soit E un ensemble non vide et A_1, A_2 et A_3 trois sous ensembles de E. On suppose que ces sous-ensembles vérifient les conditions suivantes :
$P_1 : A_1 \neq E \quad A_2 \neq E \quad A_3 \neq E$
$P_2 : A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_3 = A_2 \cup A_3 = E$
$P_3 : A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$
Montrer que la famille $\{A_1^c, A_2^c, A_3^c\}$ forme une partition de l'ensemble E.

$\boxed{\text{Exercice n°11}}$

Soient E et F deux ensembles, A et B deux sous-ensembles de E et C et D deux sous-ensembles de F. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Sinon, donner un contre-exemple)

1) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

2) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

$\boxed{\text{Exercice n°12}}$

Soient E et F deux ensembles, A un sous-ensemble de E et et D un sous-ensemble de F.

1) Déterminer en fonction de A, D, du complémentaire de A dans E et du complémentaire de D dans F, le complémentaire de $A \times D$ dans $E \times F$.

2) Quand a-t-on $(E \times F) \setminus (A \times D) = (E \setminus A) \times (F \setminus D)$?

3) Dans quels cas les ensembles $A \times D, A \times (F \setminus D), (E \setminus A) \times D, (E \setminus A) \times (F \setminus D)$ forment-ils une partition de $E \times F$?

$\boxed{\text{Exercice n°13}}$

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les ensembles $A \setminus B$, $B \setminus C$, A^c et C forment une partition de E.