Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Feuille de TD n°2

DEUG1 MIAS - MASS
UE 3 - MA2
Année 2002-2003

Exercice n°1

Ecrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes.

1) La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) On peut trouver au moins un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

3) Il existe plusieurs rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

4) Il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

5) Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.

6) Soit A_1, A_2 et A_3 des sous-ensembles d'un ensemble E et soit x un élément de E.

- **a)** x appartient à tous les A_i.
- **b)** x appartient à au moins deux des A_i.

Exercice n°2

Donner la négation de

1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad (|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

2) $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n| < M.$

Exercice n°3

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon, donner leur négation.

1) $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \sqrt{n} \leq A.$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\quad 1/n < x.$

Exercice n°4

Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1) $(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0) \Longleftrightarrow \big[(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \text{ ou } (\exists x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)\big].$

2) $(\exists x \in \mathbb{R},\ f^2(x) + g^2(x) = 0) \Longleftrightarrow \big[(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)\big].$

Exercice n°5

1) Les propositions suivantes sont-elles vraies lorsque $E = \mathbb{Z}$? Lorsque $E = \mathbb{Q}$?

- **a)** $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\quad (x = 0 \text{ ou } xy = 1)$
- **b)** $\forall x \in E,\ \forall y \in E, \exists z \in E,\quad \big((x < y \text{ et } x < z \text{ et } z < y) \text{ ou } y \leq x\big)$
- **c)** $\forall x \in E,\quad \big((\exists y \in E,\ y^2 < x) \Longrightarrow (\exists z \in E, x = z^2)\big).$

2) Ecrire leurs négations.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 6}$

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $C(x,y)$ la propriété " $y^2+xy-x-1=0$ ". Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Expliciter la négation des affirmations fausses.

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, C(x,y)$

2) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, C(x,y)$

3) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, C(x,y)$

4) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, C(x,y)$.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 7}$

Contrôle du 23 novembre 1996

Dans chacun des cas suivants, la proposition énoncée est-elle vraie ? Justifier.

P_1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \big(y^2+1=x \text{ ou } x^2-y^2 \geq 0\big)$

P_2 : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \big(y^2+1 \neq x \text{ et } x^2-y^2 < 0\big)$

P_3 : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \big(y^2+1=x \text{ et } x^2-y^2 \geq 0\big)$

P_4 : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \big(y^2+1=x \text{ ou } x^2-y^2 \geq 0\big)$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 8}$

Contrôle du 5 avril 1997

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

P_1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\,(x=1 \text{ ou } y=1 \text{ ou } xy \neq 1)$

P_2 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\,(x=1 \text{ ou } y=1 \text{ ou } xy \neq 1)$

P_3 : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\,(x=1 \text{ ou } y=1 \text{ ou } xy \neq 1)$

P_4 : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\,(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1 \text{ et } xy=1)$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 9}$

Contrôle de novembre 1997

1) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier. Si la proposition est fausse, utiliser un raisonnement par l'absurde ou démontrer la négation.

$P_1 : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ \big[y>1 \Longrightarrow (x \neq 0 \text{ et } y=x^2+1)\big]$.

$P_2 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \big[y>1 \Longrightarrow (x \neq 0 \text{ et } y=x^2+1)\big]$.

$P_3 : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ \big[y \leq 1 \Longrightarrow (x=0 \text{ ou } y \neq x^2+1)\big]$.

2) Reconnaitre, dans chacune des deux propositions suivantes, une proposition équivalente à P_1, P_2, P_3 ou à leurs négations.

$P_4 : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ \big[(x=0 \text{ ou } y \neq x^2+1) \Longrightarrow y \leq 1\big]$.

$P_5 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \big[(y>1 \text{ et } x=0) \text{ ou } (y>1 \text{ et } y \neq x^2+1)\big]$.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 10}$

1) Pour quels n entiers naturels, la proposition $P(n)$ suivante est-elle vraie ?

a) $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N}, \quad (x \leq y \Longrightarrow n \leq y)$

b) $\forall y \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{N}, \quad (x \leq y \Longrightarrow n \leq y)$

c) $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N}, \quad (n \leq x \Longrightarrow n \leq y)$.

2) Dans chaque cas, écrire (non $P(n)$) et chercher pour quelles valeurs de z, elle est satisfaite.