

Exercice n°1

On considère les deux hypothèses suivantes

P_n : 9 divise $10^n - 1$ et Q_n : 9 divise $10^n + 1$.

1) Montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.

2) Que peut-on en conclure ?

Exercice n°2

Calculer $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$ et $\sum_{i=1}^n (i^2 + 2i + 3)$.

Exercice n°3

Contrôle du 23 novembre 1996

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice n°4

Contrôle de novembre 1997

Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (2k+1)$ et $A_n = (-1)^n S_n$.

1) Calculer A_0 , A_1 , A_2 et A_3 .

2) Proposer une valeur pour A_n et prouver votre affirmation par récurrence.

Exercice n°5

Contrôle du 5 avril 1997

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a

$$\prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=1}^n (n + k).$$

Exercice n°6

Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1},$$

$$2) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

$$3) \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Exercice n°7

Montrer que, si $n \geq 4$, alors $2^n < n!$.

Exercice n°8

Soit a_n le nombre entier défini par $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Calculer a_n .

Exercice n°9

Soit E un ensemble, la proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), \quad A \not\subset B \implies B \subset A.$$

Exercice n°10

Soit x , y et z trois réels parmi lesquels il y a zéro et deux réels non nuls de signe contraire. On suppose que les trois implications suivantes sont vraies :

$$P_1 : x = 0 \implies y > 0$$

$$P_2 : x > 0 \implies y < 0$$

$$P_3 : y \neq 0 \implies z > 0.$$

Comparer x , y et z .

Exercice n°11

Contrôle du 23 novembre 1996

Soit a l'âge du capitaine McInfo en 1996 et p , q et r les trois propositions :

$$p : (a = 40 \text{ ans}) \quad q : (a = 50 \text{ ans}) \quad r : (a = 60 \text{ ans}).$$

On note P_1 , P_2 et P_3 les propositions suivantes :

$$P_1 : (p \implies q)$$

$$P_2 : (q \text{ ou } r) \text{ et } (\text{non } p)$$

$$P_3 : (\text{non } r) \implies (\text{non } q)$$

Peut-on avoir (P_1 et P_2 et P_3) ? Montrer qu'il n'y a qu'une solution possible.

Quel est l'âge du capitaine dans ce cas ? Donner une justification détaillée.

Exercice n°12

Contrôle du 5 avril 1997

On considère quatre propositions A, B, C et D dont on ignore les valeurs de vérité. On suppose que les quatre propositions suivantes sont vraies :

$$P_1 : C \implies [(\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B)]$$

$$P_2 : (\text{non } D) \implies (\text{non } C)$$

$$P_3 : D \iff B$$

$$P_4 : \text{non } [A \text{ et } (\text{non } B) \text{ et } (\text{non } C) \text{ et } (\text{non } D)].$$

On suppose A vraie. Quelles sont les valeurs de vérité de B, C et D ? Donner toutes les solutions possibles.

Exercice n°13

Donnez à Benoît, Francis, Sophie et Valentine chacun leur bateau, grâce aux indications suivantes :

A) Si le bateau n°1 n'est pas à Francis, le n°2 est à Sophie.

B) Si le bateau de Valentine est le n°1 ou le n°2, alors le n°3 est à Benoît.

C) Si le bateau de Sophie n'est pas le n°4, alors le bateau de Valentine est le n°1.

D) Si le bateau de Francis est le n°1 ou le n°4, alors le bateau de Sophie est le n°3.

Exercice n°14

On définit sur $\mathbb{R}^2$ trois propositions :

$$P_1 : |x + y| \leq 1 \quad P_2 : |x - y| \leq 1 \quad P_3 : |x| \leq 1.$$

Dessiner, en justifiant, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ pour lequel la proposition $((P_1 \text{ et } (\text{non } P_2)) \iff P_3)$ est vraie.

Exercice n°15

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels. On suppose que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) = 0. \text{ Déterminer } P.$$

Exercice n°16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$ par implications puis par équivalence.

Exercice n°17

Contrôle du 23 novembre 1996

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . On note respectivement B^c et C^c les complémentaires de B et C dans E .

- 1) Montrer que $(A \cap B^c = A \cap C \implies A \subset B^c \cup C^c)$.
Indication : on pourra, pour x élément de A , distinguer les cas x élément de C et x élément de C^c .
- 2) Soit x un élément de $B \Delta C$. On suppose que x appartient à C , montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que x appartient à B^c .
- 3) Montrer que $B \Delta C = (B \cup C) \cap (B^c \cup C^c)$.
- 4) Montrer l'équivalence :

$$[A \cap B^c = A \cap C \iff (A \subset B \cup C \text{ et } A \subset B^c \cup C^c)].$$

Exercice n°18

Contrôle de novembre 1997

Soit E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E .

- 1) On suppose que $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$.
Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $A \cap B \cap C = \emptyset$.
- 2) Montrer l'équivalence

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \iff A \cap B \cap C = \emptyset.$$

- 3) On suppose $A \cap B \cap C = \emptyset$, $(A \setminus B) \neq \emptyset$, $(B \setminus C) \neq \emptyset$ et $(C \setminus A) \neq \emptyset$.
Montrer que $(A \setminus B)$, $(B \setminus C)$ et $(C \setminus A)$ forment une partition de $A \cup B \cup C$.