Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Feuille de TD n°6

DEUG1 MIAS - MASS
UE 3 - MA2
Année 2002-2003

MANIPULATION DES FORMULES AVEC INDICE

Exercice n°1

1) Calculer $S_1 = \sum_{i=1}^{n} 1$, $S_2 = \sum_{i=1}^{n} i$, $S_3 = \sum_{i=1}^{n} n$ et plus généralement $S_4 = \sum_{i=1}^{n} (a + li)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.

Calculer $S_5 = \sum_{i=1}^{n} aq^i$ où $a \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$.

2) Trouver deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}\cdot$ En déduire $S_p = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k(k+1)}\cdot$

3) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $a^n - b^n = (a-b)\sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-p-1}$ et que pour tout entier naturel n impair $a^n + b^n = (a+b)\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p a^p b^{n-p-1}$.

4) A l'aide de la formule du binôme appliquée à $(1+x)^n$, calculer

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p, \quad \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p, \quad \sum_{p=1}^{n} pC_n^p, \quad \sum_{p=2}^{n} p(p-1)C_n^p, \quad \sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p.$$

Exercice n°2

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Connaissant le quotient et le reste de la division de a par b, peut-on en déduire le quotient et le reste de la division de a par le quotient de a par b ?

Exercice n°3

Soit $(a, b, n) \in \mathbb{N}^3$; on obtient, par division euclidienne (de n par a et de q par b), les égalités $n = aq + r$ et $q = bq' + r'$. Quels sont le quotient et le reste de la division de n par ab ?

Exercice n°4

Montrer qu'un et un seul des trois entiers n, $n + 2$ et $n + 4$ est divisible par 3.

Exercice n°5

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

Exercice n°6

Montrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $a_n = 2^{3n+3} - 7n - 8$ est divisible par 49.

Exercice n°7

Montrer que, si n divise $2^n + 1$, alors $2^n + 1$ divise $2^{2^n+1} + 1$.

Exercice n°8

On considère un entier naturel n dont l'écriture décimale est abc. Montrer que si 27 divise n, alors 27 divise les entiers dont les écritures décimales sont bca et cab.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 9}$

Quel est le reste de la division euclidienne de 2917^{541} par 5 ?

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 10}$

Quel est le chiffre des unités de $3548^9 \times 2537^{31}$?

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 11}$

Quels sont les entiers naturels n tels que 7 divise $2^n + 3^n$?

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 12}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.
Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 7 si, et seulement si, a et b le sont.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 13}$

Examen de septembre 2001
Soient x, y et z trois entiers.

1) Démontrer la proposition suivante

$$x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0\,[3] \implies x + y + z \equiv 0\,[3].$$

2) On se propose de démontrer la proposition suivante

$$x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0\,[9] \implies (x \equiv 0\,[3] \text{ ou } y \equiv 0\,[3] \text{ ou } z \equiv 0\,[3]).$$

- **a)** n étant un entier, déterminer la classe de n^3 modulo 9 selon la classe de n modulo 3.
- **b)** En déduire par contraposition la proposition.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 14}$

Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \overline{3}\overline{x} + \overline{2}\overline{y} = \overline{1} \\ \overline{2}\overline{x} + \overline{4}\overline{y} = \overline{3} \end{cases}$

$\boxed{\text{Exercice n°15}}$

Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \overline{2}\overline{x} + \overline{3}\overline{y} = \overline{2} \\ \overline{4}\overline{x} + \overline{5}\overline{y} = \overline{2} \end{cases}$

$\boxed{\text{Exercice n°16}}$

Quels sont les entiers relatifs x tels que $x^2 - 3x + 4 \equiv 0\,[7]$?

$\boxed{\text{Exercice n°17}}$

Résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{x}^2 + \overline{x} + \overline{6} = \overline{0}$.

$\boxed{\text{Exercice n°18}}$

Résoudre dans $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{x}^2 + \overline{6}\overline{x} + \overline{9} = \overline{0}$.

$\boxed{\text{Exercice n°19}}$

Examen de septembre 2001

Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels (a, b) l'entier $ab(a^2 - b^2)$ est multiple de 3.

$\boxed{\text{Exercice n°20}}$

Examen de juin 2002

On rappelle que $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes de congruence modulo 26.

1) Montrer que l'application f de cet ensemble dans lui-même définie par $f(\overline{x}) = \overline{3}\overline{x} + \overline{9}$ est une bijection. Calculer la bijection réciproque f^{-1}.

2) L'application g de $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ dans lui-même définie par $g(\overline{x}) = \overline{4}\overline{x} + \overline{3}$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?