Université de Rennes 1 — DEUG1 MIAS - MASS
UFR Mathématiques — UE 3 - MA2
Feuille de TD n°4 — Année 2002-2003

Exercice n°1

Contrôle de novembre 1995

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(x)$ où la partie entière $E(x)$ est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

1) Soient $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que $v \circ u = Id_{\mathbb{R}}$. Montrer que l'application u est injective et l'application v est surjective.

2) Tracer le graphe de f pour $x \in [-2, 2]$.

3) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

4) Déterminer $f(]0,2[), f^{-1}(]0,2[), f\big(f^{-1}(]0,2[)\big)$.

5) Expliciter $f \circ f$.

6) Peut-on trouver une application

a) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$?

b) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ h = Id_{\mathbb{R}}$?

Exercice n°2

Contrôle du 23 novembre 1996

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x - 2$.

1) Donner la définition de $f^{-1}(\{4\})$. Calculer $f^{-1}(\{4\})$.

2) L'application f est-elle injective ?

3) L'application f est-elle surjective ?

4) Donner la définition de $f([-1,1])$. Calculer $f([-1,1])$.

5) Donner la définition de $f^{-1}([-2,4])$. Calculer $f^{-1}([-2,4])$.

Exercice n°3

Soit f l'application définie de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+5)/(x-1)$.

1) L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

2) Montrer qu'il existe un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ et une bijection g de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans F tels que $g(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer g^{-1}.

Exercice n°4

Contrôle du 5 avril 1997

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ pour tout x réel.

1) Déterminer $f^{-1}(\{-3/4\})$.

2) L'application f est-elle injective ?

3) L'application f est-elle surjective ?

4) Déterminer $f([-\ln 2, \ln 2])$.

$\boxed{\text{Exercice n°5}}$

Soit f l'application définie de $E = \mathbb{C} \setminus$ {-i,i} dans $\mathbb{C}$ par $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z}{1+z^2} \end{cases}$.

1) Montrer que f est surjective.

2) L'application f est-elle injective ?

3) Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par l'application f.

$\boxed{\text{Exercice n°6}}$

Soit f l'application définie de $E = \mathbb{C} \setminus$ {-i,i} dans $\mathbb{C}$ par $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z/1+z^2 \end{cases}$.

1) Montrer que f est surjective.

2) L'application f est-elle injective ?

3) Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par l'application f.

$\boxed{\text{Exercice n°7}}$

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ par $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$.

1) Déterminer l'image par f du disque $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$.

2) Déterminer l'image par f du demi-plan $A = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) < 1/2\}$.

$\boxed{\text{Exercice n°8}}$

Soit a un nombre complexe de module différent de 1. On définit sur $\mathbb{C} \setminus \{-\overline{a}\}$ l'application f par $f(z) = \dfrac{az+1}{z+\overline{a}}$.
Montrer que la restriction de f au cercle $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ est une bijection de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$. Quelle est la bijection réciproque ?

$\boxed{\text{Exercice n°9}}$

Examen de septembre 2001

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ par $f(x,y) = \left(x^2, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
Etudier l'injectivité de f et calculer l'image de l'ensemble $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

$\boxed{\text{Exercice n°10}}$

Examen du 19 décembre 2001

Soit l'application f définie par : $\quad f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right) \end{array}$.

1) Montrer que l'image de l'application f est contenue dans l'ensemble $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2+y^2 = 1\}$.

2) Déterminer l'image réciproque du singleton $\{(0,1)\}$.

3) L'application f est-elle injective ?

4) L'application f est-elle surjective ?

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 11}$

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer $f^{-1}(\{(3, 2)\})$. L'application f est-elle injective ?

2) Est-elle surjective ?

3) Quelle est son image ?

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 12}$

Contrôle de novembre 1997

1) On définit une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = 2x - y$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Donner la définition de $f^{-1}(\{1\})$ et le dessiner.

b) L'application f est-elle injective ?

c) Montrer que l'application f est surjective.

2) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (t, t^2)$.

a) Donner la définition de $g(\mathbb{R})$ et le dessiner.

b) L'application g est-elle surjective ?

c) L'application g est-elle injective ? Est-elle bijective ?

d) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Déterminer $g^{-1}(D)$ et $g\big(g^{-1}(D)\big)$.

3) Déterminer $f \circ g$. Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 13}$

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$.

1) Déterminer l'image réciproque du singleton $\{(0,0,0)\}$.

2) L'application f est-elle injective ?

3) Déterminer l'image de f.

4) L'application f est-elle surjective ?

5) Mêmes questions pour l'application g définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par $g(x,y,z) = (3x-y+z, 4x-y+2z, -2x+y)$.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 14}$

Contrôle de septembre 1996

Soient un ensemble E et f une application de E dans E.
On définit par récurrence sur n f^n par $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1) On suppose f injective. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n strictement positif, f^n est injective.

2) On suppose f surjective. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n strictement positif, f^n est surjective.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 15}$

Soit f une application de E dans F.

1) Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Montrer que

$$\begin{aligned}
&(A_1 \subset A_2) \Rightarrow \big(f(A_1) \subset f(A_2)\big)\\
&f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)\\
&f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \text{ avec égalité si } f \text{ injective.}
\end{aligned}$$

2) Soient B_1 et B_2 deux parties de F. Montrer que

$$\begin{aligned}
&(B_1 \subset B_2) \Rightarrow \big(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\big)\\
&f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\\
&f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).
\end{aligned}$$

3) Soient A une partie de E et B une partie de F, montrer que

$$\begin{aligned}
&f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A \text{ avec égalité si } f \text{ injective}\\
&f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B \text{ avec égalité si } f \text{ surjective.}
\end{aligned}$$