Module MA2

Examen du mardi 16 décembre 2003

Durée de l'épreuve : 2 h

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice n°1 (3,5 points)

On définit une relation dans $\mathbb{R}$ par

$$x \mathcal{R} y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = n x.$$

- 1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.
- 2) $\frac{1}{3}$ et 1 sont-ils en relation ? $\frac{2}{3}$ et 1 sont-ils en relation ?
- 3) L'ordre est-il total ?

Exercice n°2 (6 points)

On considère l'ensemble $E = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. On note $\bar{x}$ la classe de x modulo 9.

- 1-a) Donner tous les couples $(\bar{x}, \overline{2x})$ et $(\bar{x}, \overline{3x})$ pour $\bar{x} \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
On donnera le résultat sous la forme d'un tableau :

$\bar{x}$	$\overline{2x}$	$\overline{3x}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- b) $\overline{2}$ et $\overline{3}$ ont-ils un symétrique pour la loi $\times$?
- 2) On considère l'application f définie par

$$f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ \bar{x} \mapsto \overline{3x} \end{cases}$$

- a) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
 - b) Déterminer $f(f^{-1}(\{\overline{6}\}))$ et $f^{-1}(f(\{\overline{6}\}))$.
- 3-a) Soit $\bar{a} \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{2x} - \overline{5a} = \overline{5}$.
- b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} \overline{2x} - \overline{5y} = \overline{5} \\ \overline{6x} - \overline{3y} = \overline{3} \end{cases}$$

Exercice n°3 (3,5 points)

Etudier la convergence des suites réelles suivantes. Justifier soigneusement les réponses.

- 1) $u_n = \frac{\sin n + n^2}{n^3 + 1}$
- 2) $v_n = \frac{(-1)^n n^2 + \sqrt{n}}{2n^2 + 1}$

Exercice n°4 (4 points)

- 1) Pour tout entier naturel n , on définit u_n comme étant le reste de la division euclidienne de n par 3.
 - a) Calculer $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ et u_6 .
 - b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
- 2) Pour tout entier naturel n non nul, on définit v_n comme étant le reste de la division euclidienne de 3 par n .
 - a) Calculer v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et v_6 .
 - b) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice n°5 (4 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}.$$

- 1) Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- 2) Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?