

**Partiel de MA2 - durée : 1h30**

Les documents et les calculatrices sont interdits.

La rédaction est importante, il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.

**Exercice 1.** Dire pourquoi chacune des affirmations suivantes est fausse.

- a.  $\exists x \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{R}, y < x$
- b.  $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, y^2 = x$
- c.  $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N}, y^2 = x$

**Exercice 2.** Montre que  $2^n \leq n! \leq n^n$  pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4.

**Exercice 3.** On considère la fonction  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  définie par  $f(x) = 2x$  si  $x > 0$  et par  $f(x) = 2x + 1$  si  $x \leq 0$ . Montrer que  $f$  est injective et n'est pas surjective.

On considère la fonction  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $g(x) = 2x$  si  $x > 0$  et par  $g(x) = 2x + 1$  si  $x \leq 0$ . Montrer que  $g$  est surjective et n'est pas injective.

**Exercice 4.** On dispose de trois balles numérotées 1, 2 et 3. L'une des balles est bleue, une autre est jaune et la dernière est rouge.

On sait que si la balle bleue porte le numéro 2 alors la balle 3 est jaune. On sait aussi que si la balle 3 est bleue alors la balle 1 est jaune. Enfin on sait que si la balle jaune ne porte pas le numéro 2 alors la balle 3 est rouge.

Quelles sont les couleurs respectives possibles des boules en fonction de leur numéro ? Montrer qu'il n'y a qu'une seule possibilité.

**Exercice 5.** Soient  $A, B$  et  $C$  trois sous-ensembles deux à deux distincts d'un ensemble fini  $E$ .

Montrer que si  $A \cap B, B \cap C$  et  $C \cap A$  sont non vides alors  $E$  possède au moins trois éléments. On peut raisonner par contraposée ou par l'absurde.