A LA RECHERCHE DES EXPRESSIONS PERDUES

Polynômes de Lagrange

Montrer que les polynômes

$$P_1(X) = X(X-1)(X-2), \quad P_2(X) = X(X-1)(X-3),$$
$$P_3(X) = X(X-2)(X-3), \quad P_4(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$$

forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Voici une démonstration incomplète de cet exercice : il y manque des "expressions de liaison" figurant dans la liste ci-dessous.

Expression		ainsi	alors	car	comme	de plus	donc	d'où
N°	1	2	3	4	5	6	7	8

Expression	et	il faut	il suffit	or	par conséquent	puisque	si	en effet
N°	9	10	11	12	13	14	15	16

Remarques :

- Une telle expression peut ne contenir aucun mot comme la numéro 1 ! !
- On essaiera de ne pas utiliser la même expression plusieurs fois.

L'exercice consiste à trouver les expressions manquantes et à les placer correctement.

. . . . $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension 4, pour prouver que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, ... vérifier qu'elle est libre.. . . . . , dans un espace vectoriel de dimension 4, toute famille libre de 4 vecteurs est une base de cet espace.
Soient λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 des nombres réels tels que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0.$$

. . . . , on sait que, ... P est le polynôme nul, ... pour tout réel a, $P(a) = 0$.

. . . . , en prenant $X = 0$, on obtient $\lambda_1.0 + \lambda_2.0 + \lambda_3.0 + \lambda_4.(-6) = 0$.
. . . . $\lambda_4 = 0$.

De même, en prenant successivement $X = 1$, on trouve $\lambda_3 = 0$, puis $X = 2$, $\lambda_2 = 0$, enfin $X = 3$, $\lambda_1 = 0$. . . . . $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

. . . . ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$, ... ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.