Sur la résolution des équations avec radicaux

Annexe V

1. Résultats d'étudiants

Le texte suivant a été proposé à 13 étudiants de DEUG 2e année MIAS et SM préparant le concours national d'entrée dans les grandes écoles d'ingénieurs.

Le problème : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2-2x} = x-3$.

Que pensez-vous du raisonnement suivant :

La racine carrée doit être définie donc $x^2-2x \geq 0$, *d'où* $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$. *On élève au carré et on obtient* $x^2-2x = (x-3)^2 = x^2-6x+9$ *d'où* $x = 9/4$, *or* $9/4 \geq 2$, *donc l'équation a une unique solution qui est* $x = 9/4$.

3 ÉTUDIANTS ONT TROUVÉ L'ERREUR :

L'un d'entre eux regarde si la solution trouvée est bien solution de l'équation de départ.

$\to$ En vérifiant dans l'équation $x = 9/4$ $\quad \sqrt{\frac{81}{16}-\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ $\quad x-3 = \frac{9}{4}-3 = -\frac{3}{4}\cdot$ Donc $x = \frac{9}{4}$ ne vérifie pas l'équation. $\to$ La valeur obtenue de x doit être supérieure à 3.

Les deux autres affirment directement qu'une racine étant positive, x doit être supérieur à 3, ce qui n'est pas le cas de 9/4.

Une racine doit être positive donc $x-3 \geq 0$ $x \geq 3$ x ne peut pas appartenir à $]-\infty, 3[$. Or $9/4 \in]-\infty, 3[$ donc 9/4 n'est pas solution de l'équation

$\sqrt{x^2-2x} \geq 0$ donc il est nécessaire d'avoir $x-3 \geq 0$ soit $x \geq 3$ donc $x = \frac{9}{4}$ n'est pas solution de l'équation.

5 ÉTUDIANTS PENSENT QUE LE RAISONNEMENT EST JUSTE, après vérification des calculs à chaque ligne :

$x^2-2x = (x-3)^2 > 0$ car $x^2-2x \geq 0$ $x^2-6x+9 = 0$ $\Delta = 0$ alors le polynôme admet une et une seule solution $x = 9/4$ appartenant à $[2, +\infty[$ d'où $9/4 \geq 2$ donc il n'y a qu'une unique solution $x = 9/4$. Le raisonnement est bon.

La racine carrée doit être définie donc $x^2 - 2x \geq 0$, d'où $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$. **vrai** On élève au carré et on obtient $x^2 - 2x = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ d'où $x = 9/4$,**vrai** or $9/4 \geq 2$, donc l'équation a une unique solution qui est $x = 9/4$.**vrai** $x^2 - 2x - x^2 + 6x - 9 = 0$ $4x = 9$ $x = 9/4$

Les 5 autres étudiants estiment le raisonnement incorrect, mais parce qu'il manque des racines.

on a élevé l'équation au carré alors $x = \pm\sqrt{9/4} = \pm 3/2$

$x = 9/4$ $9/4 \geq 0 \Rightarrow x = \pm 3/2$ or $+3/2$ n'appartient pas à l'intervalle des solutions $\Rightarrow$ unique solution $x = 3/2$

$x = 9/4$ n'est pas forcément une unique solution, car en élevant au carré, on peut avoir transformé une solution négative en solution positive

$x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ OK $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2x \Leftrightarrow 0 = 4x - 9 \Rightarrow x = 9/4 \geq 2$ Mais il faut également prendre la solution négative $x = -9/4 \leq 0$

$x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ oui $x^2 - 2x = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x = 9/4 \geq 2$ il faut prendre en compte $-9/4$ aussi

Trois des étudiants ont vu et montré que la "solution" proposée était fausse. Mais, pour ce faire, ils se contentent de constater que la valeur 9/4 trouvée ne convient pas :

- soit en vérifiant directement que 9/4 n'est pas solution (1 étudiant)
- soit en remarquant que, puisque $\sqrt{f(x)}$ est positif, si x_0 est solution, on doit avoir $x_0 - 3 \geq 0$, condition qui n'est pas vérifiée par 9/4 (2 étudiants)

Aucun étudiant n'explique pourquoi apparaît la valeur 9/4, à savoir que l'élévation au carré "crée" de nouvelles solutions parce que "$a = b$" n'est pas équivalent à "$a^2 = b^2$".

2. Rédactions d'enseignants

A la suite de ce test, nous avons entamé une réflexion sur la façon de résoudre ce type d'équations et d'en rédiger la démonstration.
Chacun des membres du groupe a proposé une ou plusieurs rédactions d'une résolution de la même équation $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, reproduites en annexe V.

L'analyse des démonstrations proposées par les membres du groupe montre qu'il y a essentiellement deux types de rédactions :

a) par "implication/vérification" qui consiste à chercher les "solutions possibles", puis à vérifier si les valeurs trouvées sont effectivement des solutions.
b) par équivalences successives, consistant à remplacer l'équation par des équations équivalentes (i.e. ayant les mêmes solutions) jusqu'à obtenir une équation équivalente que l'on sache résoudre.

On peut y ajouter deux autres types de rédactions que nous n'étudierons pas :

c) par l'absurde,
d) par étude des cas.

Les différences entre les rédactions proposées (du type a) ou b)) consistent essentiellement en l'introduction ou non :

- d'une part, de l'ensemble de définition D de l'équation - que l'on peut raisonnablement définir comme étant l'intersection des domaines de définition des fonctions intervenant dans l'équation - qui, pour l'équation étudiée, est le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$;
- d'autre part, de l'ensemble S des solutions de l'équation.

3. Quelques remarques sur l'ensemble de définition

On appelle ensemble de définition de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ l'intersection D des ensembles de définition D_1 de f_1 et D_2 de f_2.
Pour l'équation (E) : $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, on peut sans inconvénient majeur se passer de D parce que la raison pour laquelle $9/4$ n'est pas solution de (E) n'est pas que $9/4 \notin D$ (en fait $9/4 \in D$) mais que $9/4$ est solution d'une équation (E'), qui n'est pas équivalente à (E), obtenue en élevant (E) au carré (à savoir $x^2 - 2x = (x-3)^2$) ce qui a pour effet de faire disparaître la contrainte $x - 3 \geq 0$ et donc de faire apparaître la "fausse solution" $9/4$.

Dans la méthode par "implication/vérification", lors de la partie "vérification", on détecte que $9/4$ n'est pas solution parce que, pour $x = 9/4$, $x - 3$ n'est pas positif, donc ne peut pas être égal à une racine carrée.
Dans la méthode avec équivalence, c'est la condition $x - 3 \geq 0$ de la dernière équivalence qui permet d'écarter $9/4$.

On pourrait donc penser que l'introduction de l'ensemble de définition ne présente pas d'intérêt majeur. Mais l'étude d'autres équations montre qu'on ne peut pas toujours s'en passer comme le montre l'exemple suivant :

Exemple :

$$(E_1) \qquad \sqrt{(x-1)(x-4)} = \sqrt{(x-2)(x-5)}$$

En voici une résolution par "implication/vérification" :
supposons que x soit solution de (E_1). Alors, en élevant au carré et en effectuant, on obtient :

$$x^2 - 5x + 4 = x^2 - 7x + 5$$

d'où $x = 3$. Ceci montre que $x = 3$ est la seule solution possible. Mais, pour $x = 3$, $(x-1)(x-4)$ vaut -2 donc $3 \notin D_1$, ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-4)}$. En fait, si D_2 est l'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{(x-2)(x-5)}$, on a $3 \notin D_1 \cap D_2 = D$, ensemble de définition de (E_1).
Dans cette équation (E_1), en élevant au carré, on fait disparaître les contraintes du type $f(x) \geq 0$ dans les termes $\sqrt{f(x)}$, i.e. les contraintes portant sur D. Il en résulte qu'il peut apparaître de "fausses solutions" et l'obstacle pour qu'elles soient solutions de (E_1) est, cette fois, qu'elles peuvent ne pas appartenir à D.
En d'autres termes, le problème de fond pour la résolution de (E_1) est l'ensemble de définition.

Autre exemple :

$$\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$$

La méthode préconisée dans les manuels de lycée est du type suivant :

- on calcule $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x > 0 \text{ et } x^2 - 1 > 0\}$
- on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = x^2 - 1$
- on élimine parmi les solutions obtenues dans l'équation précédente celles qui n'appartiennent pas à D.

Conclusion.

a) Dans tous ces exemples, la solution par "implication/vérification" fonctionne. Lors de la partie "vérification", on constate que les termes $\sqrt{f(x)}$ ou $\ln\big(f(x)\big)$ sont définis ou non pour les valeurs de x trouvées dans la partie implication. Il n'est pas nécessaire de déterminer complètement D, mais la référence à D reste sous-jacente.

b) De même, dans la méthode par équivalence, la référence à D est présente, même si D n'apparaît pas dans la rédaction :

i) Dans l'équation $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, elle se trouve dans l'équation $x^2 - 2x = (x-3)^2$ qui implique $x^2 - 2x \geq 0$.

ii) Dans l'équation $\sqrt{(x-1)(x-4)} = \sqrt{(x-3)(x-5)}$, on écrit

$$\begin{aligned}(E_1) &\Longleftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-4) = (x-3)(x-5)\\ (x-1)(x-4) \geq 0\\ (x-3)(x-5) \geq 0\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-4) = (x-3)(x-5)\\ (x-1)(x-4) \geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

et la dernière condition, de fait équivalente à $x \in D_1$, introduit D sans le dire clairement.

En conclusion, il semble préférable d'introduire D systématiquement : cela aide les élèves à clarifier le sens de l'équation.
De plus, on pourra ainsi mettre en évidence que les raisons qui permettent d'écarter les fausses solutions peuvent être liées à D ou non.

Ajoutons que, dans une méthode par équivalence, de par son extrême concision, certaines conditions à écrire pour avoir un "système" équivalent à l'équation initiale peuvent être difficiles à comprendre et plus encore à déterminer pour les élèves qui risquent d'en oublier et de donner des solutions fausses.
Exemple :

$$\sqrt{x^2-2x} = x-3 \Longleftrightarrow \begin{cases}x^2-2x = (x-3)^2\\ \qquad\quad x-3 \geq 0\end{cases}$$

Cette équivalence n'est sans doute pas évidente pour beaucoup d'élèves (ni d'ailleurs la référence à D).
En contrepartie, la compréhension de cette équivalence a un effet formateur certain. Il peut donc être utile de signaler ce type de rédaction.

4. Quelques suggestions

Dans la solution par "implication/vérification", les élèves oublient souvent la partie vérification. La raison peut être liée à la formulation de la proposition : "si x est solution, alors $x = 9/4$", qui est démontrée dans la partie "implication".
Pour les élèves, écrire "si x est solution" signifie que x est effectivement solution et la deuxième partie de la démonstration, consistant à vérifier que la valeur $9/4$ trouvée dans la première partie est solution, n'a pas lieu d'être.
Pour combattre cet effet néfaste du langage, nous proposons deux "améliorations" de la rédaction :

– Remplacer “si x est solution” par “supposons que x soit une solution” : on voit mieux qu'il s'agit d'une supposition/hypothèse, et que, dans la première partie, on étudie les conséquences de cette hypothèse. Notons que “soit x une solution” semble plus néfaste que “si x est une solution” car la première formulation renforce l'idée que x est effectivement solution.
– Il semble utile d'introduire l'ensemble S des solutions :
  • dans la méthode par “implication/vérification”, l'introduction de S permet d'insister sur la nécessité de la partie “vérification” : la première partie montre que $\{9/4\} \subset S$ et la seconde partie consiste à étudier l'autre inclusion qui, ici, s'avère fausse ;
  • dans la méthode par équivalence, S sert uniquement à mieux visualiser le résultat.
– L'emploi du nom “implication/vérification” pour la méthode permettrait peut-être d'insister sur la nécessité de la partie vérification.

5. Un peu de logique

La rédaction du type “implication/vérification” contient une difficulté de nature logique. En fait, la première partie démontre une propriété du type :

$$\forall x\ (A(x) \Rightarrow B(x)) \qquad \big[\text{ici, } \forall x \in \mathbb{R}\big(x \text{ solution de } (E) \Rightarrow x = 9/4\big)\big]$$

dont on sait qu'elle est vraie lorsque A et B sont toutes les deux vraies mais aussi lorsque A est fausse. Dans la pratique, pour rédiger la démonstration d'une telle proposition, on écrit :

supposons que A soit vraie.

Puis on démontre que B est vraie. Mais on n'envisage jamais (ou presque) le cas où A est fausse. Or, pour l'équation (E) : $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, nous sommes justement dans le cas où A est fausse car il n'y a en réalité aucun x vérifiant (E) donc la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}\,(\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3 \Rightarrow x = 9/4)$$

est vraie. On rencontre rarement cette situation dans le langage courant. Cela explique peut-être la difficulté pour les élèves à admettre la nécessité de vérifier que $9/4$ est effectivement solution.

TABLE DES MATIERES