Chapitre 2

Les difficultés structurelles

1. L'équivalence et l'implication

1.1. L'implication $P \Longrightarrow Q$

a) Utiliser une implication vraie
On sait que la proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie.
Exemple : ABC triangle rectangle en $A \Longrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$
Modus Ponens : pour calculer la longueur d'un des côtés du triangle
Absurde : pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle. On suppose qu'il l'est et on calcule $AB^2 + AC^2 - BC^2$
Contraposée : Même but que précédemment. On montre que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ et on en déduit que le triangle n'est pas rectangle.

b) Prouver une implication
Directement : on suppose P vraie et on montre Q (Hypaux P)
Contraposée : on suppose (non Q) vraie et on montre (non P) (Hypaux non Q)
Absurde : on suppose P vraie et (non Q) vraie (Hypaux P, Abs non Q)

c) Des exemples
Voir les transparents : Pythagore, théorème direct, réciproque et contraposées ; extrait d'un livre (Déclic) ; 2 copies problèmatiques, exemples d'activités (propriétés directes ou réciproques ; est-ce le même théorème ; triangle, es-tu rectangle)

d) Remarque
Vérité de l'implication : $P \Longrightarrow Q$ est vrai quand (non P) vraie. C'est ce qu'on retrouve dans la démonstration litigieuse.
Une mauvaise idée : partir de l'hypothèse. Pour démontrer $P \Longrightarrow Q$, on suppose P vraie et on cherche à montrer Q. En général, l'hypothèse P doit intervenir au cours du raisonnement, il n'en est pas le point de départ.

1.2. L'équivalence

a) Les dangers de l'équivalence : le transparent sur les systèmes équivalents.
b) Résolution d'équations : l'exercice $\sqrt{} =$
c) Des équivalences cachées : les égalités d'ensembles.

Les équivalences sont source de nombreuses erreurs dans les raisonnements, même dans la résolution de systèmes avec la méthode de Gauss. Il vaut mieux raisonner par double implication.

2. Le statut des lettres, les quantificateurs

2.1. Le statut des lettres

Il y a ambiguité dans le vocabulaire : soit $x \in \mathbb{R}$ et soit x le réel tel que. . . . S'agit-il d'un $\forall x$ ou $\exists x$?

Transparent sur le barycentre dans le Dimathème. Le statut des lettres change presque à chaque phrase. On peut découper le texte en 8 parties :

I) M pt quelconque $\forall M, f(M) =$
II) M qcq A qcq, $\forall M, \forall A, f(M) = f(A) + \overrightarrow{MA}$
III) M qcq, A fixé $\exists A, \forall M f(M) = f(A)$
IV) M fixé vérifie $f(M) = 0$
V) A qcq, M fixé vérifie $f(M) = 0$
VI) A fixé, M fixé
VII) un nouveau point
VIII) M qcq (mais nécessiterait A qcq dans II)

2.2. Montrer $\forall x, P(x)$

Texte de démonstration : " soit x quelconque " avec éventuellement une indication du genre : " cherchons à montrer $P(x)$ ".
L'objet, désigné par x dans le texte, désigne un objet quelconque. Mais à partir de " soit x ", c'est le même objet, fixé, jusqu'à la fin de la démonstration de $P(x)$.

Transparents : montrer le convergence, d'une suite, f injective, $u \circ f = v \circ f$

Difficultés ou erreurs dans la démonstration d'un " $\forall$ "

- Confusion entre les deux démarches " prouver " et " utiliser " (prenons $\varepsilon = 1 \ldots$)
- Un objet qui dépend d'un autre objet, même quelconque, n'est plus quelconque ($y = f(x)$, y étant quelconque, x aussi ...)
- Réécrire des " $\forall$ " à toutes les lignes, sans se donner une lettre pour désigner l'objet quelconque, lettre qui doit servir jusqu'à la fin de la démonstration ($\forall e, \forall y = g(e), \forall y' = h(e) \ldots$)
- L'utilisation, correcte, de la même lettre pour prouver des " $\forall x, P_i(x)$ " successifs peut occasionner des difficultés dans la compréhension du texte de démonstration. C'est le cas pour la récurrence.

2.3. Utiliser $\forall x, P(x)$

Texte de démonstration : " soit x quelconque, alors on a $P(x)$ ". On utilise plutôt cette hypothèse pour un objet déjà nommé antérieurement dans le contexte.

Exemples :

- Une constante de la théorie : " pour $\varepsilon = 1$, on a ...", " Une rotation conserve l'alignement. Considérons la rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/4$ ..."
- Un objet déduit d'un objet nommé antérieurement : " En prenant ε_2 égal à η_1 déduit de la continuité de f, on obtient un η_2 tel que ... "
- Un objet déduit d'un objet quelconque : " soit ε quelconque. Écrivons la continuité de la fonction f pour $\varepsilon/2$. On en déduit qu'il existe η_1 tel que ... "

Difficultés pour utiliser une hypothèse " $\forall$ "

- Il faut choisir l'objet quelconque qui est utile pour poursuivre la démonstration : en géométrie, savoir choisir la transformation qui va conserver le " bon" alignement ou choisir la " bonne " origine qui facilitera les calculs vectoriels pour les barycentres ... En analyse, choisir le " bon " ε pour utiliser une hypothèse de continuité ;
- Lorsque le " ε " porte sur un objet complexe : une fonction, une transformation en géométrie, un ensemble de parties ..., il faut fabriquer cet objet.

2.4. Montrer $\exists x, P(x)$

Il faut fabriquer un objet, le choisir. Plus le choix est large, plus il est difficile de choisir.

– L'objet est déjà présent dans la théorie. C'est une constante de la théorie (Exemple : prenons $x = \pi$. Cela démontre $\exists x, \cos x = -1$).
– On peut utiliser un théorème d'existence (Exemple : théorème de la valeur intermédiaire).
– On peut définir x par une formule :
Dans une preuve de continuité : " posons $\eta = \varepsilon/2$ ". Cela utilise le ε quelconque, lettre choisie antérieurement dans le texte, pour prouver $\forall\varepsilon$. Cela utilise aussi l'existence du réel $\varepsilon/2$.

Difficultés dans la démonstration d'un $\exists$

– Comprendre que l'existence est rattachée à une propriété
– Supposer le problème résolu pour trouver l'objet.
Dans les preuves de continuité, il faut supposer que le problème est résolu pour pouvoir choisir un η qui convient. On retrouve la même démarche dans les textes de démonstration de l'existence du barycentre.
– Dire que n'importe quel objet convient quand c'est le cas

2.5. Utiliser $\exists x, P(x)$

transparent $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

– On doit nommer l'objet qui existe par un nom différent des noms déjà utilisés dans la démonstration
– Chaque objet mathématique, donné par sa définition, doit porter un nom qui lui est propre : *soit M le milieu de $[AB]$. M est confondu avec le point d'intersection M' de $[AB]$ avec la parallèle à (BC) passant par le milieu de $[AC]$.*
– Lorsque plusieurs noms ont été choisis antérieurement pour désigner des objets quelconques, on peut utiliser une notation fonctionnelle : d_n pour le plus petit diviseur de n plus grand que 1.

Erreurs dans l'utilisation d'un $\exists$

– Nommer du même nom deux objets différents car correspondants à des propriétés différentes ou dépendants d'objets différents
– En géométrie, deux points, " d'existence distincte " peuvent tre confondus sur la figure, par exemple, dans les problèmes d'alignement ou de milieu. Il est alors un peu difficile pour les élèves de comprendre pourquoi on leur donne des noms différents.
– Oublier la propriété attachée à l'existence

2.6. L'ordre des quantificateurs

Changer l'ordre augmente la difficulté : penser à la différence entre la convergence simple et la convergence uniforme ou entre la continuité et la continuité uniforme.
Transparent Tous pour un, un pour tous

2.7. Les "$\forall$" cachés

Il existe au plus un x vérifiant $P(x)$ ne comporte pas de quantificateur $\exists$. Elle se formalise en

$$\forall x, \forall x', (P(x) \text{ et } P(x')) \Longrightarrow x = x'.$$

et se démontre en utilisant une stratégie en $\forall$ ou par l'absurde.

x **existe et est unique**. Le mot " unique " n'a de sens que relativement à une propriété. (Dans le langage courant, quand on dit "vue unique sur la mer ", cette phrase n'a pas de sens). On peut construire x et en trouver un seul, mais peut-être que cette unicité est liée à la construction. Il faut démontrer qu'il ne peut y en avoir plus d'un.
Transparent Primitives.

Il existe exactement un x **tel que** $P(x)$. Difficile de prendre la négation si on l'écrit sous la forme $\exists ! x \in E, P(x)$. On doit écrire
$(\exists x \in E, P(x))$ et $(\forall x, \forall x' (P(x)$ et $P(x')) \Longrightarrow x = x')$.
Il faut séparer la preuve de l'existence de la preuve de l'unicité. La preuve de l'unicité ne doit pas dépendre de la construction faite pour montrer l'existence.

2.8. Les sous-entendus

$\forall x \in E, P(x)$ sous-entend $\forall x, (x \in E \Longrightarrow P(x))$
$\exists x \in E, P(x)$ sous-entend $\forall x, (x \in E$ et $P(x))$
La deuxième expression permet de mieux comprendre la négation.

2.9. Le mot “soit”

Il s'utilise lorsque l'on a une hypothèse d'existence mais aussi pour démontrer un $\forall$

2.10. Les quantificateurs et l'implication

Transparent : Systèmes équivalents
Transparent : les quantificateurs : quelques règles de logique
Transparent : coordonnées et parallélisme

3. La récurrence

Deux types de difficultés :

- utilisation de lettres identiques dans la partie où l'on démontre : pour tout n, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ et pour l'énoncé de la conclusion : pour tout n, $P(n)$
- construction par récurrence sous-entendue

3.1. Raisonnement par récurrence

La partie hérédité d'un raisonnement par récurrence s'écrit, en langage de description, de la manière suivante :

Gen $n \in \mathbb{N}$.
  HypAux $P(n)$ vraie $(*)$
    ... preuve de $P(n+1)$
  Fin Hypaux
  $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$
FinGenHypAux
$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

La lettre n change de statut au cours de la démonstration : au début, c'est une variable générale, puis elle est fixée à la ligne $(*)$. Il est souhaitable de changer de nom dans la preuve de l'hérédité pour éviter une confusion.

3.2. Construction par récurrence sous-entendue

Le principe de récurrence est également très utilisé mais de manière trop implicite dans les manuels dans les constructions par récurrence : par exemple, dans les exercices sur les suites récurrentes. Il est demandé aux élèves d'admettre que pour définir une suite (u_n), il suffit de se donner le premier terme et la relation liant u_{n+1} à u_n. L'existence de telles suites est souvent une évidence pour le professeur, mais pour l'élève ? Le problème se retrouve avec le symbole $\sum$. Lorsque l'on pose $u_n = \sum_{i=0}^{n} i$, on écrit, en fait, une suite u_n définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n + 1$. L'utilisation de petits points est courante et peut souvent aider à la compréhension du sens de l'objet que l'on manipule. Cependant, on ne fait plus une démonstration, mais on utilise plutôt des techniques lorsque l'on essaie de retrouver un résultat en utilisant des petits points.

Exemple : calculer $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
Cette expression comporte des petits points dont la signification ne pose guère de problèmes. Elle conduit tout naturellement à un texte comme le suivant :

Montrons que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

En additionnant ces deux lignes, on trouve la somme de n termes :
$2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$.

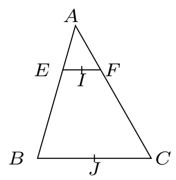
Cependant, il est difficile de considérer ce texte comme une démonstration au sens strict (ne serait-ce que parce que les propriétés utilisées ne sont pas claires). Mais pour en rédiger une, il est nécessaire de comprendre que S_n est l'objet défini par récurrence de la manière suivante : $S_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $S_{n+1} = S_n + n + 1$. Le texte de la démonstration est alors : Montrons par récurrence que $S_n = n(n+1)/2$. Cette formule est évidente pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour k et montrons-la pour $k+1$. On a $S_{k+1} = S_k + k + 1$. Comme $S_k = k(k+1)/2$ d'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire $S_{k+1} = k(k+1)/2 + k + 1 = (k+1)(k+2)/2$. D'où le résultat.

4. Nommer des points en géométrie

Quand il s'agit de montrer que l'image d'un point par une transformation donnée d'un point particulier A de la figure est un autre point particulier B, on se sert souvent de la démarche suivante : on donne à l'image de A par la transformation un nom C différent de B, puis on montre que $B = C$. C'est conforme aux règles de démonstration, mais cela présente une difficulté pour les élèves : nommer un même point de deux noms différents.
On rencontre cette difficulté dans les problèmes d'alignement, de milieu et de transformations. 5exemples suivants de démonstrations correctes

Exemple en Troisième

◇ **Enoncé :** *Dans un triangle ABC, on construit les points E et F de $[AB]$ et de $[AC]$ tels que $AE = \frac{1}{3}AB$ et $AF = \frac{1}{3}AC$. Soit I le milieu de $[EF]$ et J le milieu de $[BC]$.*

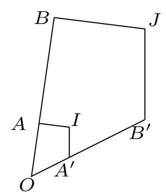


Montrer que A, I et J sont alignés.

◇ **Démonstration :** Traçons la droite (AI). Elle coupe (BC) en K. Dans le triangle ABC, nous avons $AE = \frac{1}{3}AB$ et $AF = \frac{1}{3}AC$. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (BC) sont parallèles et $EF = \frac{1}{3}BC$. Donc $EI = \frac{1}{3}BJ$.
Dans le triangle ABK, nous savons donc que $(EI)//(BK)$. Donc, d'après le théorème de Thalès, comme $AE = \frac{1}{3}AB$, $BK = 3EI$. On en déduit que $BK = BJ$, donc $J = K$.

Exemple en Seconde

◇ **Enoncé :** *On se donne deux droites D et D' sécantes en O. sur chacune d'elles, on se donne deux points, A et B sur D et A' et B' sur D', tels que $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OA'}$.*



Soit I un point qui n'appartient ni à D, ni à D', ni à (AA'). On mène par B la parallèle à (AI) et par B' la parallèle à $(A'I)$; elles se rencontrent en J. Montrer que O, I et J sont alignés.

$\diamond$ **Démonstration :** Désignons par K l'image de I par l'homothétie de centre O et de rapport 3. Cette homothétie transforme A en B, A' en B' et donc (AI) en (BK) et $(A'I)$ en $(B'K)$. On en déduit que $(AI)//(BK)$ et $(A'I)//(B'K)$. Donc J est confondu avec K.

5. Méthodes et démonstration

Pour résoudre de manière satisfaisante un problème dont l'objet, explicite ou implicite, est la justification, il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser une démonstration au sens strict.
Voici quelques méthodes enseignées :

- résolution d'équations du premier ou du second degré - On utilise des règles qui permettent d'obtenir, à partir d'une équation, une nouvelle équation, plus simple, mais ayant les mêmes solutions. Par exemple, "quand on ajoute aux deux membres d'une équation la même quantité, on obtient une équation équivalente". La validation de ces règles a fait l'objet, dans le cours, de démonstrations plus ou moins explicites. Mais au moment où elles sont utilisées, elles sont légitimement considérées comme des méthodes. La suite de ces équations est généralement accompagnée du symbole $\Longleftrightarrow$.
  (Pour les inéquations ou les équations comportant des racines carrées, les méthodes sont trop complexes pour être utilisées par les élèves)
- étude des variations d'une fonction - On étudie le signe de la dérivée. Généralement, d'autres méthodes apparaissent alors : mise en facteurs et tableau de signes par exemple.

Citons d'autres méthodes : calcul algébrique, identités remarquables, formules de trigonométrie, méthode de Gauss pour les systèmes linéaires, déterminant, calcul de valeurs propres, décomposition en éléments simples, calcul de primitives, développement en série, résolution d'équations différentielles (sans recollement), ...

Chapitre 3

Analyses de copies d'élèves

La lecture des démonstrations écrites par les élèves plonge parfois l'enseignant dans la perplexité. De nouveaux outils d'analyse, centrés sur le texte lui-même, sont nécessaires.
Bien sûr, aucune analyse de textes ne nous permettra de comprendre avec certitude la logique de la démarche d'un élève, mais elle aidera l'enseignant à entamer une discussion avec lui.

1. La grille de Duval

Cette grille n'est adaptée qu'aux démonstrations qui sont un enchaînement de pas.

1.1. Découpage en pas

On segmente, dans la mesure du possible, le texte en propositions.
On essaie de repérer celles qui peuvent avoir, dans l'esprit de l'élève, le statut de conclusion d'un pas.
Pour chacune de ces conclusions, on essaie de repérer dans le texte les éléments du pas correspondant : le théorème ou la définition qui en est le centre et les propositions d'entrée. Souvent certains de ces éléments sont sous-entendus ; dans ce cas, on essaie de les rétablir en tenant compte de l'ensemble du texte.

1.2. Analyse des éléments explicites de chaque pas

L'énoncé du théorème contient-il clairement une ou des hypothèses et une conclusion ?
La conclusion du pas est-elle compatible avec la conclusion du théorème ?
La conclusion du pas est-elle l'une des hypothèses du théorème ?
Une des hypothèses du théorème est-elle explicitement citée comme proposition d'entrée dans ce pas ?
Toutes les hypothèses du théorème sont-elles explicitement citées comme propositions d'entrée dans ce pas ?
Y a-t'il des propositions d'entrée de ce pas qui ne sont pas des hypothèses du théorème ?

1.3. Analyse de l'enchaînement des pas

Pour chaque proposition d'entrée d'un pas :

- était-elle dans l'énoncé,
- ou avait-elle été démontrée antérieurement,
- ou est-elle signalée comme devant être démontrée ultérieurement ?

Dans le cas contraire est-elle obtenue par "équivalence sémantique" avec une proposition ayant l'une des propriétés ci-dessus ?
Y a-t-il des conclusions intermédiaires qui ne sont pas utilisées comme propositions d'entrée d'un autre pas ?
Y a-t-il globalisation pour deux pas semblables ?

La **notion d'équivalence sémantique** correspond à l'idée suivante : pour celui qui rédige une démonstration, certaines propositions veulent dire exactement la même chose. Par exemple : $ABCD$ parallélogramme. E symétrique de C par rapport à D. Montrer que $ABDE$ est un parallélogramme. On peut considérer que les données du problème sont $EC = DE$, E, D et C alignés, $DC = AB$, $(AB)//(DC)$, ... L'élève qui partirait d'une de ces hypothèses ferait une équivalence sémantique.

Dans le cas d'une équivalence sémantique, le passage d'une formalisation à une autre se fait sans aucun intermédiaire. C'est simplement la reformulation d'une idée.

Dans l'analyse d'une copie, il faut à chaque fois que cela est possible essayer d'interpréter l'absence de certains éléments comme une équivalence sémantique.
Le terme de **globalisation** désigne le fait de regrouper, dans le texte, plusieurs pas en un seul.

1.4. Analyse des marques du statut des propositions

Les différents statuts des propositions sont-ils marqués par des connecteurs, des expressions ou des dispositions ?
Les marqueurs utilisés sont-ils réutilisés de la même manière dans plusieurs pas de démonstration ?
Quand une conclusion d'un pas est réutilisée comme hypothèse d'un autre pas, le changement de statut est-il marqué explicitement ?
Y a-t-il des marqueurs spécifiques pour le passage d'un pas à l'autre ?

1.5. Remarques importantes

Nous ne pouvons analyser de manière pertinente une copie d'élève avec cette grille sans utiliser notre connaissance du problème et en particulier les différentes solutions : notre découpage en propositions, l'analyse de chacun des pas pour lesquels des composantes sont sous-entendues en dépend de manière essentielle. Par exemple, si l'élève a dans l'idée une solution à laquelle l'analyseur n'a pas pensé, il est très peu probable que son analyse soit pertinente pour aider l'élève.

Il y a évidemment une forte part d'interprétation puisque le plus souvent il faut rétablir des sous-entendus, aussi bien au niveau des propositions qu'au niveau des articulations. C'est pourquoi il est utile de faire de temps en temps ce travail d'analyse à plusieurs ; cela amènera une prudence nécessaire.

L'analyse ne doit pas être confondue avec le diagnostic. Comme toujours, celui-ci va dépendre de beaucoup d'autres facteurs comme notre connaissance de l'élève, la connaissance de ce qui s'est passé dans la classe, les conditions dans lesquelles la démonstration a été demandée. En particulier, ce n'est qu'en fin d'analyse qu'on peut émettre un avis sur le fait que l'élève a résolu le problème.

2. Le diagnostic

L'analyse ne doit pas être confondue avec le diagnostic. Il sera plus facile si, au lieu d'analyser une copie, on s'efforce de suivre l'évolution de l'élève à travers une série de copies. Rappelons que le but n'est pas de faire une simple évaluation du travail de l'élève. Il s'agit d'essayer de repérer ses points forts et ses points faibles pour l'aider à progresser. Souvent une discussion avec l'élève sera nécessaire pour éclairer les résultats de l'analyse.

Plusieurs idées peuvent servir de point d'appui pour le diagnostic :

2.1. Les caractéristiques globales du texte

- Le fait que le découpage en propositions du texte de l'élève soit problématique est un indice très négatif.
- On trouve des démonstrations qui se présentent comme réduites à un pas : les propositions d'entrée sont toutes les données du problème, la conclusion est la question posée et le théorème est en général complètement absent. Ce genre de disposition est évidemment un indice fortement défavorable.
- La variété des mots, expressions et dispositions indiquant les statuts des propositions ou articulant les pas entre eux est a priori un indice favorable, à condition bien sûr qu'il n'y ait pas trop de contre-sens dans leur usage. Au contraire, l'utilisation de formules très stéréotypées peut être l'indice d'une prudence excessive liée à un manque de maîtrise de la démonstration (ou l'indice d'un contrat didactique trop contraignant).
- L'existence de globalisation est un indice ambigu. Pour un élève qui ne présente pas de difficulté, c'est plutôt un indice très encourageant car il indique une bonne maîtrise des subtilités d'un texte de démonstration. Pour un élève en difficulté, il arrive que cela

corresponde à un manque de clairvoyance sur sa capacité à maîtriser ce type de texte : on constate souvent, en effet, l'impossibilité de reformuler les pas globalisés en deux pas distincts.
– Certains élèves semblent n'avoir aucune difficulté à rédiger un texte (phrase correcte, texte facile à découper en propositions, utilisation d'expressions variées...), mais ne semblent pas avoir compris la structure profonde du pas de démonstration ou de la liaison entre les pas (par exemple, la conclusion d'un pas est présentée comme une donnée...). Au contraire, d'autres élèves ont sans doute une bonne maîtrise de la structure, mais sont incapables de la mettre en texte. Dans ces deux cas, les productions des élèves semblent mauvaises ; il faut savoir relever l'aspect positif pour travailler plus efficacement l'aspect négatif.

2.2. Les sous-entendus

– Le fait que tous les pas contiennent au moins une proposition d'entrée est un indice positif : cela peut indiquer, en effet, que l'élève a bien conscience que les pas ont trois composantes.
– La présence ou l'absence d'un énoncé explicite des théorèmes a moins de signification : elle dépend en effet beaucoup du contrat didactique ou du degré de difficulté des théorèmes rencontrés. Cependant la présence d'un énoncé simple accompagnée de l'absence d'un énoncé complexe est un indice négatif.
– Plus généralement un texte avec beaucoup de sous-entendus peut être un indice favorable pour un élève qui fait peu de fautes : il indique une bonne maîtrise. Au contraire cela devient un indice défavorable pour un élève faisant beaucoup de fautes.

2.3. Les propositions d'entrée

– Quand le théorème utilisé n'est pas une équivalence, retrouver la conclusion du théorème parmi les propositions d'entrée est un indice très défavorable.
– Le fait de donner des propositions d'entrée en excès, ou d'obtenir des conclusions intermédiaires qui ne sont pas réutilisées dans un autre pas sont des indices défavorables. Pourtant, il n'y a pas là de véritables fautes du point de vue de la structure de la démonstration.

2.4. Les théorèmes

– La confusion entre théorème direct et théorème réciproque n'est pas un indice fortement défavorable. C'est, en effet, une distinction difficile pour les élèves de quatrième, d'autant plus, qu'à leurs yeux l'énoncé du théorème a un aspect si stéréotypé qu'ils retiennent seulement l'idée que cet énoncé parle des deux propositions qui les intéressent et qui de toute façon sont équivalentes. Citons cette amusante comparaison : "quand je pousse une porte et qu'elle ne s'ouvre pas, je la tire" ; il est vrai que dans ces circonstances, on se garde bien de réfléchir avant d'agir pour savoir s'il faut la pousser ou la tirer ; l'attitude des élèves de quatrième est sans doute la même vis-à-vis d'un théorème et de sa réciproque. Cette erreur est évidemment plus grave pour un élève de seconde. À ce niveau, le contrat didactique est beaucoup plus contraignant et tous les élèves savent que cette erreur sera relevée par l'enseignant. Notons, a contrario, que le fait qu'un élève ne fasse jamais cette faute est un indice très favorable.
– L'énoncé d'un théorème faux inspiré d'un théorème du cours est un indice ambigu. Il n'est pas rare, en effet, que cela corresponde à une erreur de formulation ; on peut le constater lorsque l'élève corrige celle-ci dès qu'on lui indique qu'il y a une faute. Il arrive aussi que certains élèves se trompent très fréquemment dans les énoncés de théorèmes alors qu'ils les utilisent tout à fait correctement dans la démonstration ; sans doute l'énoncé est-il ici considéré plus comme un stéréotype qui sert à évoquer certaines idées, que comme un véritable texte. Dans ce cas, le travail devra porter sur les énoncés de théorèmes. Pour ces élèves, c'est un changement de point de vue sur les énoncés de théorèmes qu'il faut obtenir. La présence d'un théorème inventé est une attitude normale pour les débutants. Par contre pour un élève de seconde

à qui on a maintes fois répété qu'il n'a droit qu'aux théorèmes du cours, c'est un indice nettement défavorable. Le fait que le théorème soit faux doit être interprété avec précaution, si l'on se place du point de vue de la démonstration car il peut s'agir d'une connaissance fausse mais qui est judicieusement utilisée dans la démonstration.

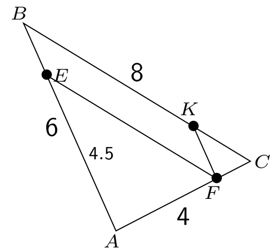
– La présence d'un théorème général est plus favorable que celle d'un théorème instancié (c'est-à-dire appliqué dans le cadre d'un élément de l'énoncé)

3. Exemples

3.1. Analyse de Duval I

L'énoncé

a) Construire un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm et $CA = 4$ cm.
b) E est le point de $[AB]$ tel que $AE = 4,5$ cm. La parallèle à (BC) menée par E coupe (AC) en F. Calculer AF.
c) La parallèle à (AB) menée par F coupe (BC) en K. Calculer BK.
d) Quelle est la nature du quadrilatère $EFKB$? En déduire EF.



Réponse au d)

1ère copie

$EFKB$ est un parallèlogramme donc $FK//EB$. Ils sont égaux. $BK//EF$. Ils sont égaux. Donc comme BK est égal à 6 alors $EF = 6$.

La segmentation de ce texte est rendu difficile par la présence de points qui séparent des membres de phrases non articulées entre eux. C'est pourquoi il est difficile de dire le nombre de pas que comporte ce texte. Nous admettrons qu'il en comporte 2.

– **Découpage en pas**
  Pas 1 :
  C : $FK//EB$, $FK = EB$, $BK//EF$, $BK = EF$
  T : théorème implicite (un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles et égaux)
  E : $EFKB$ parallélogramme
  Remarque : proposition d'entrée et conclusion inversées
  Pas 2 :
  C : $EF = 6$
  T : théorème implicite (transitivité de l'égalité) *normal qu'il soit implicite*
  E : $BK = 6$ (=question c)), $BK = EF$ (= pas précédent)
  Remarque : pas avec une structure claire et correcte
– **Articulation des pas** : difficile d'être très affirmatif. Ce que l'on peut dire : une des conclusions n'est pas repris dans les pas suivants ($FK = EB$) ; une des propositions d'entrée ($EFKB$ parallélogramme) n'a pas été obtenu antérieurement ; deux données ($(EB)//(FK)$ et $(BK)//(EF)$) se retrouvent en conclusion d'un pas.
– **Marqueurs** : plusieurs propositions n'ont pas de marqueurs. Cependant le texte en contient et ceux semblent maîtrisés. "Donc" pour un changment de pas, "comme" pour une propositon d'entrée, "alors" pour une conclusion. Il y a deux "donc" dans ce texte : le premier indique une conclusion, le second un changement de pas.
  On peut remarquer un mauvais usage des symboles : $FK//EB$ au lieu de $(FK)//(EB)$. Ils sont égaux : droites ou longueurs ? ?
– **Conclusion** : il semble que l'auteur de ce texte ne maîtrise pas la structure de la démonstration bien que le dernier pas soit un indice encourageant : les théorèmes ne sont pas cités et l'articulation n'est pas bonne. En revanche, il ne semble pas avoir de difficultés à utiliser des

mots de liaison dans une situation simple.

2ÈME COPIE

$EFKB$ est un parallélogramme car il a ses côtés opposés parallèles.
EF ? Comme $EFKB$ est un parallélogramme donc il a ses côtés de même mesure donc EF est égal à KB.
$EF = 6$ cm

- **Découpage en pas**
  Pas 1 :
  C : $EFKB$ parallélogramme
  T : théorème implicite (un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme)
  E : côtés opposés parallèles deux à deux (implicite : $(EF)//(KB)$ et $(EB)//(FK)$ = données du texte)
  Pas 2 :
  C : $EF = KB$
  T : théorème explicite
  E : $EFKB$ parallélogramme (= pas précédent)
  Pas 3 :
  C : $EF = 6$
  T : théorème implicite : transitivité de l'égalité
  E : $EF = KB$ (= pas précédent) et $KB = 6$ (implicite)
- **Articulation des pas** : structure claire et correcte.
  Dans deux pas, certaines propositions d'entrée sont implicites, alors qu'elles n'ont pas été obtenues dans un pas proche.
  Le changement de statut de "$EFKB$ parallélogramme" entre le premier et le troisième pas est explicitement marqué.
  Les théorèmes sont énoncés assez explicitement (sauf la transitivité, ce qui est normal)
- **Marqueurs** : les statuts des propositions sont marquées de manière très explicite sauf pour la dernière. Il y a aussi des marqueurs pour indiquer les pas : le passage à la ligne est systèmatique et "$EF = ?$" marque l'entrée du deuxième pas. La variété des tournures (car, donc) montre une certaine liberté d'écriture. Le premier "donc" placé devant le théorème est inusuel.
- **Conclusion** : cette copie montre une bonne maîtrise de la démonstration. Il faudrait s'assurer que le fait de ne pas rappeler explicitement les propositions d'entrée ne sera pas un handicap dans une démonstration plus complexe.

3ÈME COPIE

$EFKB$ est un parallélogramme car $EF//BK$ et $EB//KF$. Un quadrilatère à 4 côtés parallèles deux à deux est un parallélogramme.
Donc $EF = BK$.
$BK = 6$ cm
Donc EF mesure 6 cm.

- **Découpage en pas**
  Pas 1 :
  C : $EFKB$ parallélogramme
  T : théorème explicite (un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme)
  E : $(EF)//(KB)$ et $(EB)//(FK)$ (=données du texte)
  Pas 2 :
  C : $EF = KB$

T : théorème implicite
E : implicite $EFKB$ parallélogramme (= pas précédent)
Pas 3 :
C : $EF = 6$
T : théorème implicite : transitivité de l'égalité
E : $EF = KB$ (= pas précédent mais implicite) et $KB = 6$ (explicite)

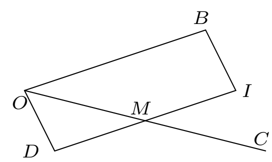
- **Articulation des pas** : place curieuse du théorème du pas 1. Pas d'énoncés de théorèmes dans les deux derniers pas. Le deuxième pas est réduit à une conclusion.
- **Marqueurs** : les marqueurs utilisés sont bien adaptés mais il en manque deux assez importants : devant le théorème du premier pas et devant $BK = 3$ dans le deuxième pas. L'utilisation dun "car" et d'un "donc" indique une certaine liberté d'expression. Négligence dans l'utilisation des symboles entre droite et longueur.
- **Conclusion** : il semble que l'auteur possède une certaine maîtrise de la structure de la démonstration puisqu'il met dans son texte la plupart des éléments nécessaires. Cependant il ne sait peut-être pas rédiger un texte qui mette en évidence cette structure et dans le cas d'une démonstration plus complexe cela peut être un handicap.

3.2. Analyse de Duval II

Exercice : O, B et C sont trois points non alignés. I est le milieu de $[BC]$ et D le point tel que $ODIB$ soit un parallélogramme. Pourquoi M, milieu de $[ID]$, est-il le milieu de $[OC]$?

La copie :

$$\begin{array}{cc} DO = IB & DO\,//\,IB \\ IB = CI & CI\,//\,IB \\ \underline{DO = CI} & \underline{DO\,//\,CI} \\ \underline{CD\,//\,IO} & \underline{CD = IO} \end{array}$$



Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu I. $DOIC$ parallélogramme donc elles se coupent en leur milieu.

Le découpage en proposition ne pose pas de problèmes. En revanche le manque d'indice sur le statut des propositions empêche en première lecture de distinguer celles qui peuvent être considérées comme conclusion de pas. Un examen plus attentif permet d'émettre une hypothèse : le souligné indique qu'il s'agit de conclusions. En tenant compte de la disposition, et en essayant de trouver le maximum de cohérence, on peut alors rétablir les pas de plusieurs manières. En voici une :

- Premier pas
  - Conclusion : $DO = CI$
  - Théorème implicite : la transitivité de l'égalité
  - Entrée : $DO = IB$ et $IB = CI$
  - Remarque : les deux propositions d'entrée sont sans doute obtenues par équivalence sémantique à partir de $ODIB$ parallélogramme d'une part et de I milieu de $[BC]$ d'autre part

- Deuxième pas
  - Conclusion : $DO//CI$ (mauvaise notation)
  - Théorème implicite : la transitivité du parallélisme
  - Entrée : $DO//IB$ et $IB//CI$
  - Remarque : là encore, les deux propositions d'entrée sont sans doute obtenues par équivalence sémantique à partir des mêmes données

- Troisième pas
  - Conclusion : $DC//IO$ (mauvaise notation) et $CD = IO$
  - Théorème implicite : une propriété des parallélogrammes qui pourrait s'énoncer ainsi : si dans un quadrilatère deux côtés oppsoés sont égaux et paralléles, les deux autres le sont aussi
  - Entrée : $DO = IB$ et $DO//CI$

- Quatrième pas
  - Conclusion : $DOIC$ parallélogramme
  - Théorème implicite : il y a au moins deux possibilités pour le théorème : "si un quadrrilatère a ses côtés égaux et parallèles, c'est un parallélogramme" ou bien "si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme".
  - Entrée : il y a quatre propositions d'entrée, alors qu'il en suffit de deux ; il est difficile d'imaginer le choix fait par l'élève.

- Cinquième pas
  - Conclusion : OC et Di se coupent en leur milieu
  - Théorème : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu
  - Entrée : $DOIC$ est un parallélogramme

Bien sûr, il y a d'autres manières d'interpréter ce texte. Mais achevons l'analyse en admettant que cette reconstruction représente bine la démarche de l'élève, on constate que

- plusieurs théorèmes sont sous-entendus, l'un ayant un énoncé non conforme à ceux du cours ;
- la plupart des propositions d'entrée sont explicitement exprimées ;
- la costruction de chaque pas est satisfaisante

Par contre, l'articulation des pas n'est pas satisfaisante :

- certaines conclusions intermédiaires ne sont pas réutilisées (puisqu'il y a trop de propositions d'entrée candidates au quatrième pas)
- il manque un pas pour obtenir la conclusion désirée : comme M est le milieu de $[ID]$, c'est aussi le milieu de $[OC]$

Il faut aussi noter deux erreurs de notation : les droites sont écrites sans parenthèse et le point I est évoqué dans le dernier paragraphe pour désigner le milieu des diagonales alors qu'ici I désigne déjà un autre point.

Mais ce qui frappe le plus c'est l'absence presque complète de mots indiquant le statut des propositions et reliant les pas entre eux ; l'unique mot de ce type est un "donc" qui est d'ailleurs bien utilisé.

Diagnostic

Si l'on essaie de faire un diagnostic, les indices favorables sont beaucoup plus nombreux après analyse qu'avant. Notons d'ailleurs que d'autres interprétations du texte de l'élève ne change pas cette impression. Il semble que cet élève ait compris les idées qui interviennent dans la solution du problème et qu'il maîtrise à peu près la structure de chaque pas. Par contre, sa principale difficulté semble être l'écriture d'un vrai texte à partir des idées qu'il a sur le problème, ce qui expliquerait d'ailleurs sa difficulté à articuler plusieurs pas entre eux. C'est donc ce point qu'il faut essentiellement travaillerr, en l'obligeant à écrire des textes "en français", quitte à lui laisser une grande variété d'expression.

3.3. Analyse de Duval III

Soient A, B, C trois points non alignés du plan. On se donne les points I, J, K, L du plan tels que
- I est le milieu de $[AB]$
- J et K sont sur la droite (BC) tels que $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{CK}$
- L est le milieu de $[IK]$

Démontrer que les points A, L et C sont alignés.

Copie d'un élève de seconde :
Comme I est le milieu de $[AB]$ alors $BI = IA$.
Comme L est le milieu de $[IK]$ alors $IL = LK$.
Donc IK est la médiane dans le triangle ABK.
Comme $BJ = JC = CK$ alors ABC est un agrandissement du triangle ABJ donc $(IJ) // (AC)$.
Comme L appartient à (AC) et que $(IJ) // (AC)$ alors A, L et C sont alignés.

La principale difficulté de cet exercice est de prouver l'alignement. Ceci nécessite de dédoubler des points, éventuellement de donner des noms différents à des points qui coincident sur la figure mais qui sont caractérisés par des propriétés différentes.
Pour mettre en évidence l'utilité d'une démonstration, il peut être utile de faire une figure un peu fausse qui "montre" les deux points, distincts par leur définition.

Analyse de Duval

- Premier pas
  - Conclusion : $BI = IA$
  - Définition de milieu
  - Entrée : I milieu de AB

- Deuxième pas
  - Conclusion : $IL = LK$
  - Définition de milieu
  - Entrée : L milieu de IK

- Troisième pas
  - Conclusion : IK médiane de ABK
  - Définition de médiane
  - Entrée : conclusion du premier pas

- Quatrième pas
  - Conclusion : ABC agrandissement de ABJ
  -
  - Entrée : $BJ = JC = CK$

- Cinquième pas
  - Conclusion : $(IJ)//(AC)$
  -
  - Entrée : Conclusion du pas précédent

- Sixième pas

- Conclusion : A, L et C sont alignés
-
- Entrée : $L \in (AC)$ et $(IJ)//(AC)$

Le point essentiel est que le pas 6 ne démontre rien, puisque un équivalent sémantique de la conclusion du pas est admis dans l'entrée du pas : $L \in (AC)$, sans avoir été démontré antérieurement.
Les pas 2 et 3 ne sont pas réutilisés. De plus le pas 2 ne sert pas non plus pour démontrer le pas 3 (lui même inutile).
Dans le pas 6 l'hypothèse (IJ) // (AC) est inutile.
Le pas 4 comporte de nombreux défauts :

- l'hypothèse $= CK$ est inutile.
- l'hypothèse $BI = IA$, utile et démontrée trois pas avant, n'est pas rappelée en entrée du pas.
- Il y a une erreur de triangle ABJ au lieu de IBJ.
- Le théorème des milieux n'est pas cité ni sous-entendu et une de ses hypothèses n'est pas rappelée dans le pas.
- Le mot "agrandissement" ne fait peut être pas partie du vocabulaire académique.

Analysons maintenant les aspects positifs de cette copie.

- Le vocabulaire de l'implication : "comme ... alors" n'est pas très varié mais correctement utilisé.
- pris séparément, les trois premiers pas sont corrects.
- le quatrième pas devient correct du point de vue de la démonstration si l'on corrige les erreurs relevées. De plus, ce pas serait utile pour obtenir une démonstration globale correcte de l'alignement.
- les pas 4 et 5 sont bien enchaînés, même si le mot "agrandissement" ne fait pas partie du vocabulaire standart.

Bilan
Cet élève semble avoir un peu compris l'enchaînement de pas utile pour le théorème des milieux. Mais il ne donne pas de manière claire tous les ingrédients du théorème. Il faudrait lui suggérer d'**énoncer le théorème** qu'il veut utiliser, en situation, et de bien **vérifier que les propositions d'entrée du théorème sont vérifiées**.
Par contre, il n'a pas du tout vu que dans la démonstration d'alignement il y a deux points en jeu. Pour y remédier, on peut lui suggérer une figure, un peu fausse, faisant apparaître les deux points et de **donner des noms différents à ces deux points**.
Il faut aussi lui faire rechercher et supprimer les pas inutiles. Cet élève semble penser qu'il faut écrire tout ce que l'on peut déduire des hypothèses. On peut à ce sujet lui dire de **regarder surtout la conclusion** pour n'écrire que ce qui est utile pour aboutir à cette conclusion.

4. Des conséquences sur les pratiques

C'est probablement par le biais du travail des enseignants sur leurs copies que les élèves reçoivent les informations les plus précises sur les structures des textes de démonstration.

4.1. Les annotations sur les copies

Transparent : la copie corrigée.
Commentaires :

– La diversité des remarques portées sur cette copie est sans doute un obstacle pour les élèves :
  – il y a deux fautes importantes : d'une part, il utilise $(ON) // (BM)$ sans l'avoir démontré ; d'autre part il utilise un théorème avec une hypothèse inutile (l'énoncé des milieux dans un triangle rectangle)
  – manque de précision : dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$
  – une faute d'orthographe "par" au lieu de "part" a empêché l'enseignant de comprendre son texte
– les points positifs de la copie ne sont pas relevés. Les mots de liaison utilisés font pourtant apparaître clairement la structure des pas.

- **Il faut distinguer la nature des erreurs** :

– fautes importantes : proposition utilisée sans être démontrée dans la démonstration, hypothèse non utile pour la démonstration (ce qui n'est pas pénalisant pour la note mais peut empêcher la progression)
– manque de précisions dans les formules (segment, droite, longueur confondus par exemple)
– fautes d'orthographe

- Il est nécessaire de **modifier** à chaque fois que cela est possible la **correction** pour lui donner un objectif d'apprentissage. En particulier, il s'agit de séparer clairement le rôle des contrôles, centrés sur l'évaluation, du rôle des autres travaux écrits, centrés sur l'apprentissage.
  Les corrections peuvent se présenter sous forme de questions, éventuellement accompagnées d'une figure pouvant apparaître comme un contre-exemple. On peut également souligner l'endroit où se trouve l'erreur et mettre dans la marge un mot qui explicite le type de l'erreur : choix du théorème, théorème non formulé, données incompatibles, argument superflu, étapes trop mélangées, étape oubliée, mots de liaison, notations, vocabulaire, ...
  Cette méthode ne peut être efficace que si l'enseignant ne propose pas trop de rubriques au même moment. Il faut également que l'élève propose une nouvelle copie améliorée à partir des indications données par l'enseignant.

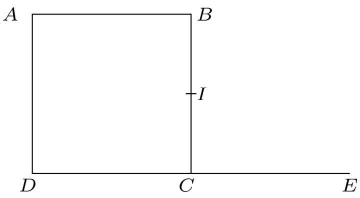
4.2. La correction en classe

Il faut y consacrer un peu de temps régulièrement.

- **faire des écrits corrigés** à distribuer aux élèves si possibles avec plusieurs démonstrations en fin de collège (problème trop courant de re-copie du tableau). À partir de la seconde, on peut ne donner des textes explicites que pour les démonstrations ou parties de démonstration qui posent de réelles difficultés aux élèves. Ces textes serviront de référence, mais dans ce cas, il faut penser à varier le style.
  Dans les démonstrations proposées par l'enseignant, il doit s'imposer quelques règles qui ne doivent en aucun devenir des exigences pour les élèves
  – tous les pas de démonstration doivent être repérables aisément ;
  – chaque pas doit avoir une conclusion explicite annoncée par une expression ou une disposition adaptée ;
  – les mots ou dispositions qui indiquent le statut de chaque proposition ne doivent présenter aucune ambiguïté ;
  – les théorèmes utilisés, qu'ils soient explicitement énoncés ou sous-entendus, doivent faire partie de la liste des théorèmes reconnus à ce stade de la scolarité.
- **faire corriger la copie d'un élève par d'autres** élèves et discuter des annotations faites ;
- **proposer une démonstration (erronée) avec commentaire** : "le résultat est obtenu avec rigueur mais il y a trop d'affirmations non démontrées"

Transparent : aider à découvrir la faute

◇ **Enoncé :** *$ABCD$ est un carré. I est le milieu de $[BC]$ et E le symétrique de D par rapport à C.*



Montrer que I est le milieu de $[AE]$.

◇ **Copie de Claire :** $ABCD$ est un carré, alors $[AD]$ est parallèle à $[BC]$. On sait que E est le symétrique de D par rapport à C, donc C est le milieu de $[DE]$.

Dans le triangle ADE, la droite (CI) est parallèle à un côté $[AD]$ et elle passe par le milieu d'un autre côté $[DE]$, donc elle coupe le troisième côté $[AE]$ en son milieu. Donc I est le milieu de $[AE]$.

Comment aider Claire à découvrir son erreur ?

- Tu soulignes d'une couleur différente chaque donnée de l'énoncé

- En gardant la couleur choisie pour chaque donnée, tu soulignes, dans la démonstration, l'endroit où cette donnée est utilisée

- Que constates-tu ?

I milieu de $[BC]$ ne sert pas !

Proposer une autre figure où I n'est pas le milieu de $[BC]$ pour réaliser que cette hypothèse doit servir.
Expliquer l'erreur dans la démonstration de Claire (difficulté de faire le lien entre milieu et alignement).

Chapitre 4

Les difficultés du langage

1. Le signe égal : =

Le signe = est utilisé de trois manières différentes :
- test d'égalité : montrer que $M = N$
- fabrication de nouveaux objets : soit $\eta = \varepsilon/2$ (parfois symbolisé par " :=")
- dans les équations : $ax^2+bx+c = 0$. En fait, on cherche l'ensemble $\{x \in \mathbb{C}\,;\, ax^2+bx+c = 0\}$.

2. L'équivalence

Il y a plusieurs vocabulaires attachés à l'équivalence

a) si et seulement si : spécifique aux mathématiques.

b) il faut et il suffit : pas toujours employé dans le même sens dans le langage courant. "pour traverser la rivière, il faut prendre le pont" ; en fait c'est "il suffit". On fait également l'erreur en mathématiques : on emploie le terme "il faut" pour exprimer les outils que l'on peut utiliser pour prouver quelque chose. Par exemple : "pour montrer que c'est un parallélogramme, il faut des droites parallèles deux à deux". On devrait dire "il suffit".

c) CNS : condition nécessaire et suffisante. "Une CNS pour qu'un quadrilatère soit un carré est qu'il ait 4 côtés de longueurs égales et 4 angles droits". Un élève dira que tout cela n'est pas nécessaire. Pourtant, on a bien les deux implications. En fait, le mot nécessaire est plus fort dans le langage courant. En français, le terme "nécessaire" ajoute une idée de minimalité, il n'y a pas de condition inutile, que des conditions indispensables.

d) est : égalité d'ensemble. "La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants à A et B". "Le triangle ABC est rectangle"

3. Si . . . , alors . . .

3.1. Le langage courant

Les nombreux mots liés aux idées de cause et de conséquence sont très utilisés en démonstration : comme, parce que, car, si . . . , alors, en effet, donc . . .
En français, le choix de la formulation modifie la signification de la phrase :

"je prends mon parapluie car il pleut"
"s'il pleut, alors je prends mon parapluie"
"s'il pleuvait, alors je prendrais mon parapluie
"Je prends mon parapluie. En effet, il pleut"

En mathématiques, toutes ces tournures sont utilisées par "$\Longrightarrow$" et nécessite, pour être affirmées dans une démonstration, un théorème ou une définition antérieurs.

Question de contrat social

Dans une école primaire, la maîtresse donne un jour un problème aux élèves, et leur dit :

"Cherchez ce problème chez vous ; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons".

Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maîtresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent :

"Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas le droit aux bonbons !".

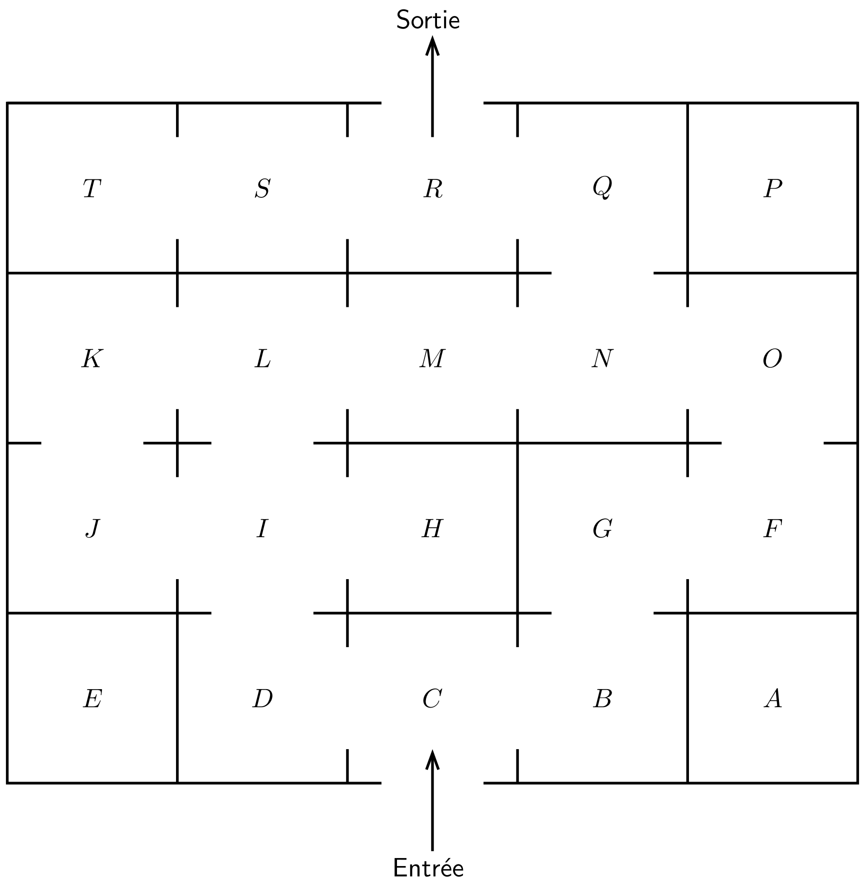
Goguenarde, la maîtresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat.

Quels commentaires vous inspirent ce récit ?

La phrase : si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons
Contraposée : si je ne vous donne pas de bonbons, c'est que personne n'a su le résoudre
Réciproque : si je vous donne des bonbons, c'est que quelqu'un a su le résoudre
Contraposée de la réciproque : si personne n'a su le résoudre, je ne vous donnerai pas de bonbons.
Les élèves assimilent la phrase à la contraposée de la réciproque, qui n'est pas équivalente à la phrase de départ.

Autre exemple : "si tu ne manges pas tes légumes, tu n'auras pas de glace". Un jeune enfant posera souvent la question : "si je mange mes légumes, aurai-je de la glace ?"

Le labyrinthe de Durand-Guerrier



Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne que nous appellerons X a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte. Les pièces sont nommées A, B, C, ... comme il est indiqué sur la figure.
Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses .

Par exemple, la phrase "X est passé par C" est une phrase VRAIE. En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe et C est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des 6 phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

1) $\boxed{X \text{ est passé par } P}$
2) $\boxed{X \text{ est passé par } N}$
3) $\boxed{X \text{ est passé par } M}$
4) $\boxed{\text{Si } X \text{ est passé par } O\text{, alors } X \text{ est passé par } F}$
5) $\boxed{\text{Si } X \text{ est passé par } K\text{, alors } X \text{ est passé par } L}$
6) $\boxed{\text{Si } X \text{ est passé par } L\text{, alors } X \text{ est passé par } K}$
7) $\boxed{\text{Si } X \text{ est passé par } S\text{, alors } X \text{ est passé par } T}$

Seulement 26% des élèves ont la bonne réponse (=fausse) pour la phrase 6. Répondre faux à cette phrase, c'est se prononcer sur un énoncé universellement quantifié : *pour tout sujet X ayant traversé le labyrinthe, si X est passé par L, alors X est passé par K.* Cette quantification n'est nullement marquée dans l'énoncé de la phrase 6. Par exemple, dans la phrase 3, cette quantification n'apparaît pas ; elle porte sur les trajets possibles.

3.2. Utiliser des expressions variées

Devant la difficulté liée aux multitudes d'expressions possibles, la tentation est grande de proposer aux élèves une manière standardisée de l'exprimer, soit sous la forme "si . . . , alors . . . " soit avec des "donc". L'expérience montre l'échec d'une telle démarche.
Il faut travailler avec les élèves sur des modes d'expressions variées et ne pas hésiter à faire inverser les rédactions ("car", "en effet"). Ce travail peut être mené dès la cinquième.

Pourquoi pas "parce que" ?

◇ **Premier temps** (travail individuel)

Dans chacune des phrases suivantes, souligne en rouge la cause et en vert la conséquence :

1) C'est un triangle isocèle parce qu'il a deux côtés égaux.
2) Traçant deux droites perpendiculaires, j'obtiens un angle droit.
3) Ce parallélogramme est un losange car il a deux côtés consécutifs égaux.

◇ **Deuxième temps** (travail de groupe)

Reconstruis les phrases suivantes, sans en changer le sens, en utilisant *parce que* :

1) Ces deux droites sont perpendiculaires à une même droite, par conséquent elles sont parallèles.
2) Le segment est si long que je n'ai pu le dessiner sur la feuille.
3) Un des angles de ce quadrilatère n'étant pas droit, ce n'est pas un rectangle.

Le principe de ce test :
• utiliser des propriétés familières aux élèves
• de nombreuses phrases doivent concernées les équivalences.

Remarque : les mots "cause" et "conséquence" peuvent prêter à discussion ; y-a-t-il une véritable relation de cause à conséquence dans la phrase 1 ? L'expérience prouve que les élèves comprennent.
Réaction des élèves devant ce genre de test : Bof ! C'est un exercice de français. . .
Les locutions les mieux reconnues sont : parce que, car, à cause de, puisque. Celles qui entraînent des sources de difficultés sont donc, entraîne, par conséquent . . . "Donc" est tellement employé dans les textes de mathématiques que, pour un élève qui n'en comprend pas le sens, il devient un mot passe-partout.

3.3. $\forall x,\ A(x) \Longrightarrow B(x)$

"Un rectangle qui a ses diagonales perpendiculaires entre elles est un carré".
Le "un" sous-entend ici le $\forall$. On peut varier le vocabulaire pour faire sentir le $\forall$: chaque fois que, tous les, toujours, quelconque
Transparent : parfois, toujours, jamais
Il est nécessaire que l'élève repère ce quantificateur pour appréhender les notions de théorème réciproque, de contraposée, de négation.
Transparent : le, la, un, une

3.4. Illustrations graphiques

Transparent : milieu et parallèles

3.5. Complexité de certains théorèmes

Transparent : droite des milieux

4. Donc

Ne pas confondre argumentation et démonstration. L'argumentation est un moyen de convaincre : on peut avancer plusieurs arguments, on peut répéter un argument sous des formes différentes ("je pense donc je suis"). Une argumentation n'apporte pas la certitude, mais la conviction. On peut trouver des argumentations dans l'activité mathématique : texte heuristique, recherche de solutions. L'argumentation est utile pour se convaincre, mais ce n'est pas une démonstration.
Transparent : exemple de la plus grande aire

5. Ou

Quelle est la notion de vérité de $2 \geq 1$? La vérité de cette phrase n'est pas claire pour la plupart des élèves car elle contient 2=1. C'est une démarche mathématique que de dire "ou" quand l'une des phrases est fausse.
En langage courant, donner moins d'information qu'à l'évidence on en possède est considéré comme illégitime.
Transparent : 2 est-il plus grand ou égal à 1 ?
Il faut travailler cette notion en jouant sur la complémentarité entre le langage des inégalités et l'appartenance à des intervalles de $\mathbb{R}$.
Transparent : une séquence autour de $2 \geq 1$

6. Existence et unicité

• L'existence et l'unicité se rapportent à une propriété ("tel que") souvent non redite ("le barycentre est unique").
• Le verbe être peut traduire une existence.
• Les deux notions sont souvent citées ensemble, mais elles se démontrent différemment.
Transparent primitive

7. En géométrie

• le mot milieu donne deux informations : un alignement et une égalité de distances
• il faut trois points pour parler d'alignement
• beaucoup de vocabulaire à assimiler (médiane, médiatrice,...)

8. Statuts des énoncés dans les livres

Transparent : Dimathème 4e, 1998

Définition : la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Le "est" signifie égal et contient donc deux implications. La phrase inversée est présente, mais non coloriée.
La médiatrice est l'ensemble des points ... : aucun statut, sauf la couleur. Important ? A l'élève de choisir... A droite, un énoncé et sa réciproque, sans couleur. Doit-on le retenir ?
Le théorème emploie encore le mot "est" mais cette fois-ci dans un autre sens.
Aucune indication sur la manière d'utiliser cet énoncé qui peut servir à montrer qu'un moint est sur une droite. En gras (= le plus important ?) centre du cercle. Le fait que les médiatrices se croisent est pourtant plus remarquables. La récirpoque du théorème n'est pas écrite, alors qu'elle sert dans les exercices 31.2 et 33.
Exercice 32 : on ne sait pas qui est O ? On peut l'interpréter comme le centre du cercle circonscrit à APN, d'où la réponse non au 1). Pour répondre à la question 2, on a besoin de l'énoncé sans titre, ni couleur.

9. La rigueur

En première approximation, il semblerait que l'évolution des exigences vis-à-vis des preuves soit allée dans le sens de l'augmentation de la rigueur exigée.
Mais qu'est-ce que la rigueur ?
S'agit-il d'une notion absolue ? Que veut-on dire lorsque l'on parle d'une démonstration de plus en plus rigoureuse ?
Prenons un exemple. Si je veux prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers, je peux tenir le discours suivant : supposons l'ensemble des nombres premiers finis. Considérons l'entier égal à un plus le produit de tous les nombres premiers. Cet entier, comme tout nombre entier, devrait être divisible par un nombre premier. Or aucun des nombres premiers de la liste considérée ne peut diviser cet entier, d'où une contradiction.
Cette preuve est-elle rigoureuse ? Convaincante ? Présente-t-elle des lacunes ? Est-ce une démonstration ?
En premier lieu, il est clair qu'en posant ces questions à des personnes ayant des connaissances mathématiques différentes, des modes de pensées différents, des idéologies différentes, nous obtiendrons des réponses elles aussi différentes.
La rigueur n'est qu'une question de conviction intime.
Elle dépend du sujet, de sa culture, de ses connaissances.
Mais, de plus, la rigueur évolue en fonction de l'époque, du contexte social : "La science accroît sa rigueur quand son progrès l'exige ; elle ne peut avoir une rigueur absolue, même si elle en donne l'illusion aux esprits superficiels... La rigueur progresse de génération en génération et, peut-être, les raisonnements que nous croyons aujourd'hui exacts se révéleront-ils demain insuffisants ". (Jean Leray 1906-1998, équations différentielles)
Ainsi Nordon et Rousseau n'hésitent pas à parler de "cette nécessité de faire confiance aux réputations ". Ils signalent l'importance des "on dit " et font remarquer que pour beaucoup de résultats "les chercheurs les réutilisent sans les avoir vérifiés en détail ".
"Il ne faut pas confondre l'intention de rigueur et la justesse des démonstrations, ainsi que l'exactitude des résultats " (J.L Ovaert)
Transparent : Clairaut

Chapitre 5

Vers la démonstration

1. De la résolution de problèmes à la démonstration

1.1. d'abord rechercher une solution

On peut

- expliquer (transparent : l'aire du triangle dans le rectangle)
- se convaincre sur des figures
- argumenter (transparent : texte 10)
- faire des conjectures (transparent : texte 7)
- utiliser des analogies

Exemple :
Dans un triangle ABC, on part d'un point D de $[AB]$, puis on mène successivement les parallèles aux côtés ; d'abord $(DE)//(BC)$ puis EF, GH, HI et IJ. J tombe-t-il sur D ou non ?

Réponse 1 : Dans un tel texte, il est évident que les parallèles jouent un rôle essentiel. Il y a deux outils disponibles dans ce cas : le théorème de Thalès et les parallélogrammes. Pour utiliser le premier outil, il semble raisonnable d'écrire une égalité de rapports pour chaque parallèle tracée, mais en choisissant ces rapports judicieusement. Pour utiliser la deuxième idée, il faut remarquer qu'il y a 6 parallélogrammes dans la figure et écrire pour chacun d'eux des égalités de côtés puisque le résultat souhaité est une égalité.
Réponse 2 : Quand le prof pose un problème de ce genre, j'ai remarqué qu'il faut toujours répondre oui. De toutes façons, j'ai fait 4 figures, j'ai même utilisé du papier quadrillé et à chaque fois ça tombe juste. On ne voit pas d'ailleurs où J pourrait être s'il n'est pas sur D.

Il faut comprendre pour accepter une démonstration (lettre de Cantor).
Une démonstration correcte doit respecter des règles, mais elle n'est pas toujours plus convaincante qu'un autre mode d'expression.

1.2. laisser l'élève rédiger en liberté

- des textes de démonstration
- des récits de recherche
- des textes heuristiques
- toutes les activités (dessins, schémas, ...) entre le début de l'étude d'un problème et sa démonstration

1.3. mais, parfois, la démonstration est un outil de résolution

La recherche peut également mener directement à la rédaction d'une démonstration.

2. La démonstration avec les élèves

2.1. Pratiquer des textes de mathématiques dès la sixième

→ partir des écrits des élèves.

Exemple :

Texte élève : Je trace un segment $[AB]$ de 4,5 cm de longueur. Avec le compas, je prends un écartement de 6,5 cm. Je pointe sur le point A. Je reprends le compas en écartant de 3 cm. Je pointe sur le point B. J'obtiens le point C et je relie A à C et B à C. Je prends l'équerre et je place l'angle droit sur la droite (AC), je la fais glisser jusqu'au point B et je trace la droite passant par B.

Texte professeur : Trace $[AB]$ un segment de 4,5 cm. Trace le cercle de centre A et de rayon 6,5 cm, puis un arc de cercle de centre B et de rayon 3 cm ; on appelle C l'un des points d'intersection. Trace les segments $[AC]$ et $[BC]$. Trace la droite perpendiculaire à la droite (AC) passant par B.

On peut constater qu'il s'agit du même programme de construction. Demander aux élèves d'expliciter les différences (l'un précise les instruments utilisés, l'autre les propriétés géométriques de la figure) et d'en écrire d'autres du même type

→ faire des activités sur le langage (transparent : parfois, toujours, jamais ...)

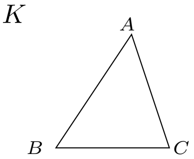
→ maîtriser les groupes nominaux complexes : parallèle à ... passant par, symétrique de ... par rapport à ...

Exemples :

◇ **Décrire une figure**

Dès la sixième, il est possible de proposer aux élèves la lecture de textes complexes décrivant une figure simple.

Soit un triangle ABC ; la parallèle à (BC) passant par A coupe en K la perpendiculaire à (AB) passant par C. Placer le point K.



◇ **Dessiner deux angles**

Voici deux exercices qui peuvent aider les élèves à comprendre le rôle subtil joué par les noms des objets dans la description d'une figure.

1) *Dessiner deux angles, l'un de* 43°, *l'autre de* 107°.
2) *Dessiner un angle* $\widehat{xOy}$ *de* 43° *et un angle* $\widehat{yOz}$ *de* 107°.

→ faire écrire aux élèves le récit de la recherche d'une solution

2.2. Comment aborder la démonstration

→ commencer par des démonstrations complexes

On en peut pas comprendre une nouvelle idée à partir d'exemples trop simples. Il faut que la démonstration ait un sens aux yeux de l'élève. Il faut éviter les "petits pas" qui n'ont pas de signification et sont vus par l'élève comme une simple équivalence sémantique.

Il faut proposer des démonstrations sur des connaissances bien acquises.

→ proposer des démonstrations qui ne sont pas des enchaînements de pas : raisonnement par l'absurde dès la troisième

→ apprendre à extraire les données d'un problème (distinguer ce qui est vrai de ce qui est à montrer) et ne pas mettre de contrainte didactique sur la façon de faire (le parallélogramme de Saint-Méen).

2.3. Travailler sur les théorèmes

Transparents : “les différentes formulations du théorème des milieux” et “à la recherche du théorème perdu”.

En quatrième, il faut faire une liste explicite d'énoncés de théorèmes en distinguant théorème direct et théorème réciproque et en évitant des énoncés qui sont des équivalences sémantiques.

2.4. Travailler sur les mots de liaison

Proposer des “démonstrations à trous”, c'est-à-dire des démonstrations dans lesquelles on laisse des trous à remplir par des mots de liaison, pour bien faire comprendre la différence entre cause et conséquence.

2.5. Utiliser des représentations non discursives

Il faut utiliser des représentations non discursives (déductogramme, tableaux, figures, ...) bien que ce ne soit pas l'objet de l'apprentissage. Toujours laisser l'élève libre de sa représentation.

Bibliographie

- La démonstration : écrire des mathématiques au collège et au lycée. Sous la direction de Jean Houdebine. Hachette Éducation, Pédagogies pour demain.
- Les brochures produites par les IREM

Table des matières

II - Les difficultés structurelles 1

1. L'équivalence et l'implication 1
   1.1. L'implication $P \Longrightarrow Q$ 1
   1.2. L'équivalence 1
2. Le statut des lettres, les quantificateurs 1
   2.1. Le statut des lettres 1
   2.2. Montrer $\forall x, P(x)$ 2
   2.3. Utiliser $\forall x, P(x)$ 2
   2.4. Montrer $\exists x, P(x)$ 2
   2.5. Utiliser $\exists x, P(x)$ 3
   2.6. L'ordre des quantificateurs 3
   2.7. Les "$\forall$" cachés 3
   2.8. Les sous-entendus 4
   2.9. Le mot "soit" 4
   2.10. Les quantificateurs et l'implication 4
3. La récurrence 4
   3.1. Raisonnement par récurrence 4
   3.2. Construction par récurrence sous-entendue 4
4. Nommer des points en géométrie 5
5. Méthodes et démonstration 6

III - Analyses de copies d'élèves 7

1. La grille de Duval 7
   1.1. Découpage en pas 7
   1.2. Analyse des éléments explicites de chaque pas 7
   1.3. Analyse de l'enchaînement des pas 7
   1.4. Analyse des marques du statut des propositions 8
   1.5. Remarques importantes 8
2. Le diagnostic 8
   2.1. Les caractéristiques globales du texte 8
   2.2. Les sous-entendus 9
   2.3. Les propositions d'entrée 9
   2.4. Les théorèmes 9
3. Exemples 10
   3.1. Analyse de Duval I 10
   3.2. Analyse de Duval II 12
   3.3. Analyse de Duval III 13
4. Des conséquences sur les pratiques 15
   4.1. Les annotations sur les copies 15
   4.2. La correction en classe 16

IV - Les difficultés du langage 19

1. Le signe égal : $=$ 19
2. L'équivalence 19
3. Si ..., alors ... 19
   3.1. Le langage courant 19
   3.2. Utiliser des expressions variées 21
   3.3. $\forall x,\ A(x) \Longrightarrow B(x)$ 21
   3.4. Illustrations graphiques 22
   3.5. Complexité de certains théorèmes 22
4. Donc 22

5. Ou . . . 22
6. Existence et unicité . . . 22
7. En géométrie . . . 22
8. Statuts des énoncés dans les livres . . . 22
9. La rigueur . . . 23

V - Vers la démonstration 25
1. De la résolution de problèmes à la démonstration . . . 25
1.1. d'abord rechercher une solution . . . 25
1.2. laisser l'élève rédiger en liberté . . . 25
1.3. mais, parfois, la démonstration est un outil de résolution . . . 25
2. La démonstration avec les élèves . . . 25
2.1. Pratiquer des textes de mathématiques dès la sixième . . . 25
2.2. Comment aborder la démonstration . . . 26
2.3. Travailler sur les théorèmes . . . 26
2.4. Travailler sur les mots de liaison . . . 27
2.5. Utiliser des représentations non discursives . . . 27