UNIVERSITÉ de RENNES 1

UFR Mathématiques

DIDACTIQUE des MATHÉMATIQUES

La Structure des Textes de Démonstration

Jean HOUDEBINE et Annette PAUGAM

2003

LA STRUCTURE DES TEXTES DE DÉMONTRATION

INTRODUCTION

Savoir rédiger des démonstration est l'un des objectifs importants de l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée.

Ce document se propose d'être un outil pour permettre aux enseignants de mieux maîtriser les « démarches » implicites qui sont à la base de la structure des textes démonstratifs.

On peut comparer l'apprentissage de la rédaction des démonstrations à celui de l'écriture de textes par un enfant. Pour que son texte soit correct, l'enfant doit respecter certaines règles grammaticales. Mais ce n'est pas par un apprentissage explicite de ces règles que la maîtrise du langage s'acquiert. C'est au travers des actions de parler, de lire et d'écrire que cette structure est appréhendée. L'apprentissage se fait par la manipulation et la comparaison de textes déjà écrits et par la correction constante des textes produits. L'apprentissage explicite de la grammaire n'a vraiment son efficacité que lorsque l'enfant maîtrise déjà en grande partie son usage.

On peut donc penser qu'une démarche analogue est nécessaire dans l'apprentissage de la rédaction des démonstrations. D'une part, il est nécessaire de proposer aux élèves des textes de démonstration variés, de les comparer, de les transformer , et d'autre part il faut qu'au moment de la production, des corrections pertimentes leur soient données. Tout ceci suppose de la part de l'enseignant une très bonne maîtrise de la structure du texte démonstratif, même s'il apparaît évident qu'il n'aura jamais à enseigner explicitement « l'art » d'analyser des textes démontratifs.

1 ANALYSE D'UN TEXTE DE DÉMONSTRATION

1.1 REMARQUES GÉNÉRALES

Nous avons choisi le texte suivant pour sa simplicité et la richesse de son contenu.

Théorème
Tout nombre entier plus grand que 1 possède un diviseur premier.

Démonstration
Soit n *un nombre entier plus grand que* 1.
S'il *est premier*, le **problème est résolu**.
Si n *n'est pas premier*, **considérons** *le nombre* p *qui est le plus petit diviseur de* n *plus grand que 1.* p *est premier.*
En effet , supposons *que* p *ne soit pas premier* ;
il existerait alors deux nombres r *et* s *différents de 1 tels que* $rs = p$*. Mais* r *serait* **alors** *un diviseur de* n *plus grand que* 1 ; **donc** r *serait plus grand ou égal à* p*.*
Cela est impossible.
Ainsi, dans tous les cas, n *a un diviseur premier.*

Un premier examen de ce texte montre qu'il n'est pas constitué de phrases se succèdant sans liens apparents. Au contraire, un certain nombre de mots et d'expressions joue un rôle essentiel dans l'articulation des phrases entre elles. Ils sont écrits en gras dans le texte.

Si l'on faisait abstraction de ces expressions, le texte se présenterait sous forme d'une suite d'affirmations. Dans les cas les plus simples, une affirmation est une conséquence évidente d'une ou plusieurs affirmations antérieures.
Par exemple, de « p est le plus petit diviseur plus grand que 1 de n »

et « r est un diviseur de n plus grand que 1 »
on déduit « r est plus grand ou égal à p » .

D'autres affirmations du texte proviennent de résultats déjà connus, mais ces résultats ne sont pas énoncés. Par exemple, « r est un diviseur de n » est une conséquence du résultat : « si r est un diviseur de p et p un diviseur de n , alors r est un diviseur de n » .

Enfin, à plusieurs reprises, les expressions articulant le texte indiquent clairement que des hypothèses nouvelles vont être ajoutées au cours de la démonstration. Par exemple, « supposons que » introduit la nouvelle hypothèse « p n'est pas premier » . De même, « si » introduit la nouvelle hypothèse « n n'est pas premier » .

Il va de soi que le résultat final ne doit pas dépendre de ces hypothèses. A un moment de la démonstration, ces hypothèses sont en effet oubliées. Ainsi les hypothèses précédentes ne sont valables que jusqu'à « ainsi, dans tous les cas » .

le plus souvent, seul l'ensemble du texte permet de se rendre compte du moment où l'hypothèse supplémentaire a été supprimée.

1.2 UNE PREMIERE ANALYSE DU TEXTE

Reprenons chacune des phrases du texte et essayons d'analyser de la manière la plus détaillée possible la démarche démonstrative. Dans cette analyse, une part d'interprétation est inévitable. En effet, certains pas sont sous-entendus et il y a plusieurs manières de rétablir ces sous-entendus.

« Soit n un nombre entier plus grand que 1 » .
a) On veut démontrer que :
« tout nombre entier plus grand que 1 a un diviseur premier » .
Pour cela, on va choisir un nombre entier quelconque et démontrer la propriété pour ce nombre. En pratique, on désigne par n cet entier quelconque . Pour être sûr que cet entier n n'a pas de propriétés particulières, on choisit un nom d'entier qui n'a pas encore été utilisé dans le texte.

b) On veut maintenant démontrer :
« si n est un entier plus grand que 1, il a un diviseur premier » .
Pour cela, on ajoute l'hypothèse « n est un entier plus grand que 1 » et on va démontrer : « n a un diviseur premier » (comme l'indique la dernière phrase du texte).

Les deux démarches a) et b) sont marquées dans le texte par le même mot, l'impératif : « soit » .

« S'il est premier ... Si n n'est pas premier ... » .
c) Ces deux débuts de phrases indiquent que l'on va tour à tour examiner deux cas. L'hypothèse « il est premier » n'est valable que pour affirmer « le problème est résolu » .

« n n'est pas premier » sera une hypothèse jusqu'à « ainsi, dans tous les cas » . Cette dernière phrase indique que les deux cas examinés épuisent tous les cas possibles. Cela est évident puisque « n est premier » ne peut être que vrai ou faux.

« Le problème est résolu » .
d) Cela signifie « n a un diviseur premier » . on a en effet trouvé un diviseur premier de n, à savoir n lui-même car on sait que « n divise n » .

« Considérons le nombre p qui est le plus petit diviseur de n plus grand que 1 »
e) Cette phrase affirme d'abord qu' « il existe un nombre qui est le plus petit diviseur de n plus grand que 1 » , résultat qui semble être considéré comme une conséquence connue de « n est un entier plus grand que 1 » . Mais, en outre, un nom est donné à ce nombre. Ce nom joue un rôle essentiel dans la démonstration ; on retrouve en effet p en de multiples endroits. Bien sûr, il faut que la conclusion

qui nous intéresse ne dépende pas du nom choisi.

Ici, on veut montrer que « n a un diviseur premier » .

f) Il est intéressant de remarquer que la phrase précédente est la conjonction de trois affirmations :

p est un diviseur de n

p est plus grande que 1

tout diviseur de n plus grand que 1 est plus grand ou égal à p.

« p est premier » .

g) Cette affirmation est écrite avant les arguments qui la justifient, comme l'indique **« en effet »** au début de la phrase suivante.

« Supposons que p ne soit pas premier » .

h) On ajoute ici une nouvelle hypothèse « p n'est pas premier » et cette hypothèse est la négation de ce qu'on veut montrer. On cherche alors à trouver une contradiction. Dès que cette contradiction sera trouvée, ce qui est marqué ici par « cela est impossible » , on pourra oublier cette hypothèse et annoncer que « p est premier » .

« Il existerait alors deux nombres r et s différents de 1 tels que $rs = p$ » .

i) On sait que dire que « p est premier » est équivalent à dire, « pour tout nombre r et s tels que $rs = p$, $r = 1$ ou $s = 1$ » .

Ainsi de « p n'est pas premier » , on déduira la phrase indiquée en utilisant les règles de négation usuelles :

Pour nier : « pour tout x, x à la propriété P » , on affirme : « il existe x, x n'a pas la propriété P » .

Pour nier : « si A alors B » , on affirme : « A et non B » .

j) La phrase analysée en i) fait plus qu'affirmer l'existence de deux nombres ; elle leur donne un nom, r et s. Ce nom sera utile jusqu'à : « cela est impossible » .

« r serait alors un diviseur de n plus grand que 1 » .

k) On déduit d'abord de la phrase prédédente « $rs = p$ » .

En effet, cette phrase est la conjonction de trois affirmations :

« r différent de 1 » , « s différent de 1 » et « $rs = p$ » . Comme on sait que « s'il existe s tel que $rs = p$, alors r est diviseur de p » , on en déduit que r est diviseur de p. Enfin, du résultat connu, « si x divise y et si y divise z, x divise z » et de p est un diviseur de n (voir f), on déduit « r est un diviseur de n » .

D'autre part, on sait que « p est plus grand que 1 » ; on en déduit que « r est différent de 0 » . On sait aussi que « r est différent de 1 » .

De ces deux résultats, on déduit « r est plus grand que 1 » .

On voit sur cet exemple que dans certains cas de nombreuses étapes de la démonstration peuvent être sous-entendus ; il faut être capable de les rétablir, mais aussi de mesurer leur difficultés. Ces sous-entendus dépendent du « public » , du sujet choisi. On demandera moins de détails , au niveau collège ou lycée, dans une démonstration en algèbre que dans certains problèmes de géométrie. En particulier, on ne peut refuser à l'élève le droit de faire des sous-entendus s'ils paraissent assez bien adaptés à son public : l'enseignant ou les élèves de la même classe.

« Donc r serait plus grand ou égal à p » .
l) On vient de voir que « r est un diviseur de n plus grand que 1 » .
On sait (voir f) que « tout diviseur de n plus grand que 1 est plus grand ou égal à p » . On en déduit donc cette affirmation.

On voit sur ces exemples que les mots **donc** et **alors** peuvent jouer des rôles tout à fait semblables. Il arrive d'ailleurs que le mot « **et** » joue le même rôle.

« Cela est impossible » .
m) Ici encore, plusieurs pas de démonstration sont sous-entendus. On peut les rétablir par exemple sous la forme : « on sait que $s \neq 1$; comme p est plus grand que 1 et $p = rs$, $s \neq 0$, donc $s > 1$ et $rs > r$, ainsi $p > r$ » .
On voit apparaître une contradiction entre $p > r$ et r est plus grand ou égal à p.

« Dans tous les cas, n a un diviseur premier » .
n) On rappelle que l'on a examiné deux cas. Comme dans chacun des cas on a trouvé un diviseur premier de n, on peut conclure. Pour montrer dans chacun des cas l'existence de ce diviseur premier, on en a simplement exhibé un. Dans le premier cas c'est n, dans le deuxième cas c'est p.

2 LE LANGAGE DE DESCRIPTION

L'analyse que nous avons faite au paragraphe précédent est longue. La lecture en est malaisée, et finalement la structure du raisonnement n'en est pas éclairée d'une manière décisive.

En particulier, nous avons repéré plusieurs démarches (b), c), e), h) et j)) dans ce texte qui consistaient à ajouter des hypothèses ou des objets pour continuer la démonstration. Nous les qualifierons ces démarches de « principales » .

Pour mieux éclairer la structure du texte, nous allons énoncer explicitement ces démarches et créer un langage, dit langage de description qui permette de les repérer aisément. Cela nous conduit à présenter le texte de la démonstration sous la forme suivante.

Gen n
  Hypaux n est un entier plus grand que 1.
    Cas n est premier ou n n'est pas premier.
      1er cas n est premier.
        Le problème est résolu.
      Fin du 1er cas.
      2ème cas n n'est pas premier.
        Il y a un plus petit diviseur de n plus grand que 1.
        Nomobj p : p est le plus petit diviseur de n plus grand que 1.
          Abs p n'est pas premier.
            Il existe deux nombres différents de 1 dont le produit est p
            Nomobj : r, s. r et s sont différents de 1 et $rs = p$.
              r est diviseur de n plus grand que 1.
              r est plus grand ou égal à p.
              r plus petit que p : cela est impossible
            Finnomobj.
            Impossible.
          Finabs.
          p est premier.
          n a un diviseur premier.
        Finnomobj.
        n a un diviseur premier.
      Fin du 2ème cas.
    Fincas.
    n a un diviseur premier.
  Finhypaux.
  Si n est un nombre entier plus grand que 1, n a un diviseur premier.
Fingen.
Un nombre entier plus grand que 1 a un diviseur premier.

2.1 Les principales démarches de démonstration

Voici maintenant la liste des démarches qui conduisent à cette présentation de la démonstration

2.1.1 Généralisation

Cette méthode est illustrée dans a).

Pour démontrer une phrase du type : « tout objet à la propriéte P » , on choisit une lettre x non encore utilisée. **On ajoute,** de ce fait, **un objet** x « général » . Puis on démontre : « x vérifie P » .

Vocabulaire
Dans le texte de démonstration on trouvera des expression comme : « Soit x » , « donnons nous un x quelconque » etc.

Dans le langage de description, l'utilisation de cette démarche sera annoncée par **Gen** suivie de la lettre x qui représente l'objet quelconque. La fin de la démarche sera annoncée par **Fingen**.
Pour ce langage, le texte se présentera sous la forme :

Démonstration
Gen x
  Démonstration
  x vérifie la propriété P.
Fingen
Tout objet vérifie la propriété P.

2.1.2 Hypothèse auxiliaire

Cette méthode est illustrée dans b).

Pour démontrer une phrase de la forme « si A alors B » , **on ajoute A aux hypothèses** puis on démontre B.

Vocabulaire
Dans le texte de démonstration on trouvera des expressions comme :
« Supposons » , « Si ... alors » , « Soit » , « En admettant que » etc

Dans le langage de description, pour marquer le début de cette démarche, on utilisera l'expression « **Hypaux** » , suivie de l'hypothèse ajoutée : A.
La démonstration se poursuivant arrive à la conclusion « si A alors B » .

Dans la langage de description le texte se présentera sous la forme :

Démonstration
Hypaux A
  Démonstration
  B
Finhypaux
Si A alors B.

2.1.3 Choix d'un nom d'objet vérifiant une hypothèse

Cette idée est illustrée dans e) et j).

Pour démontrer une phrase B à partir d'une hypothèse de la forme « il existe un objet ayant la propriété A » , **on choisit** un objet que l'on nomme à l'aide d'une lettre x non utilisée dans le texte précédent ni dans B et **on ajoute aux hypothèses** « x vérifie la propriété A » , puis on démontre B.

Vocabulaire

Dans le texte de démonstration on trouvera des expressions comme « Soit x_0 » , « considérons le x_0 tel que » etc.
Le fait de mettre un indice à x n'est pas obligatoire mais il permet éventuellement de se rappeler que x n'est pas un objet général, le vocabulaire utilisé étant sinon très proche de celui de la généralisation.

On peut rencontrer cette démarche dans deux situations : Soit on dispose d'un théorème d'existence, soit on construit un objet en le définissant par une formule (par exemple, dans une démonstration de continuité, lorsque l'on écrit « posons $\eta := \frac{\varepsilon}{2}$ » , on affecte à la lettre η la valeur $\frac{\varepsilon}{2}$).
Dans notre langage, pour marquer le début de cette démarche, on utilisera l'expression « **Nomobj** » suivie du nom x de l'objet et de l'hypothèse vérifiée par x. On annonce la fin de cette démarche par « **Finnomobj** » .

Le texte se présentera alors sous la forme :

Démonstration
Il existe un objet vérifiant la propriété A.
Nomobj x , x vérifie A
Démonstration
B
Finnomobj
B

2.1.4 Raisonnement par l'absurde

C'est ce qui a été décrit dans le h).
Voulant démontrer A, **on ajoute aux hypothèses** la négation de A puis on cherche une contradicton.

Vocabulaire

Dans le texte de démonstration on trouvera des expressions comme :

« sinon » , « dans le cas contraire » ou simplement « supposons » pour commencer, puis. « contradiction » , « ce qui est absurde » , etc, pour finir et assez souvent l'emploi du conditionnel.

Dans notre langage pour représenter l'utilisation de cette démarche, on utilisera l'expression « **Abs** » suivie de l'hypothèse que l'on doit ajouter, c'est-à-dire la négation de A. Après avoir trouvé une contradiction, c'est-a-dire après avoir rencontré dans la démonstration une affirmation et sa négation, on annonce la fin de la procédure par l'expression « **Finabs** » et on tire la conclusion A.

Le texte se présente alors sous la forme :

Démonstration
Abs Négation de A
Démonstration
Impossible

Finabs
A

2.1.5 Disjonction des cas

C'est ce qui est décrit en c).

Pour démontrer une phrase B à partir d'une hypothèse de la forme « A_1 ou A_2 ... ou A_n » , **on ajoutera** successivement **aux hypothèses** A_1, puis A_2. . . . . puis A_n et dans chacun des cas on montre B.

Vocabulaire
Dans le texte de démonstration on trouvera des expressions comme :
« étudions les différents cas » mais aussi « Si par exemple » ou encore, « soit...soit... » etc.

Dans notre langage de description, pour indiquer l'usage de cette démarche, on utilisera le symbole « **Cas** » , suivi de la phrase qui indique les cas à examiner : A_1 ou A_2 . . . . ou A_n.
Puis on marquera « **1er cas** » suivi de la première hypothèse : après avoir obtenu la conclusion B, on terminera ce premier cas par « **Fin 1er cas** » .
On indiquera de même le deuxième cas et les cas suivants.
Enfin, pour clore, on utilisera « **Fin cas** » suivi de la conclusion B.
Le texte se présentera sous la forme :

Démonstration
Cas A_1 ou A_2 . . . . ou A_n
  1er cas A_1
    Démonstration
    B
  Fin 1er cas
  2ème cas A_2
    Démonstration
    B
  Fin 2ème cas
  . . . .
  nème cas A_n
    Démonstration
    B
  Fin nème cas
Fincas
B

2.1.6 Disjonction des cas avec cas impossibles

Pour démontrer une phrase B à partir d'une hypothèse de la forme

« A_1 ou A_2 . . . ou A_n » , **on ajoutera** successivement **aux hypothèses** A_1 puis A_2 . . . puis A_n. Si, dans un ou plusieurs cas, on a démontré B et si, pour les autres cas, on a trouvé une contradiction, B est bien démontré.

Vocabulaire
Dans le texte de démonstration ou trouvera des expressions comme celle de la disjonction des cas avec aussi quelques « ceci est absurde » ou « Ce cas est impossible » ... etc. Mais la démonstration reste tout à fait correcte sans l'écriture explicite de cette dernière expression.

Dans notre langage de description, pour indiquer l'usage de cette démarche, on utilisera le symbole « **Casabs** » , suivi de la phrase qui indique les cas à examiner : A_1 ou A_2 . . . . ou A_n.
Puis on marquera « **1er cas** » suivi de la première hypothèse.
Après avoir obtenu la conclusion B ou la conclusion contradiction, on termine le premier cas par « **Fin 1er cas** » . On fait de même avec les autres cas.
Enfin, pour clore, on utilisera « **Fincasabs** » suivi de la conclusion B.
Le texte se présente sous la forme :

Démonstration
Casabs A_1 ou A_2 . . . . ou A_n
  1er cas A_1
    Démonstration
    Contradiction
  Fin 1er cas
  2ème cas A_2
    Démonstration
    B
  Fin 2ème cas
  . . . .
  nème cas A_n
    Démonstration
    Contradiction
  Fin nème cas
Fincasabs
B

En conclusion, on peut remarquer que le vocabulaire peut être le même pour deux parties de démonstration de structure totalement différentes : par exemple le mot « **soit** » est utilisé aussi bien pour se donner un objet général que pour donner un nom à un objet particulier. C'est le contexte qui permet d'analyser correctement la démonstration. il est évident que l'on pourrait décrire d'autres procédures du même type que les précédentes, par exemple, celle concernant l'usage de l'expression « **en effet** » , qui permet d'affirmer un résultat et de le démontrer ensuite, ou celle qui, pour montrer A ou B, consiste à ajouter la négation de A aux hypothèses et à démontrer B, ou encore, le raisonnement par **contraposée**, qui consiste pour montrer montrer « si A alors B » , à montrer

« si non B alors non A » . Cependant, nous nous limiterons aux cinq procédures décrites dans ce paragraphe. En effet :

- ce sont les procédures les plus courantes, les plus significatives,
- on peut toujours, pour faire une démonstration, n'utiliser que ces cinq procédures.

2.2 LES RÈGLES DE CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

Nous avons dégagé, dans le paragraphe précédent, les grandes structures du texte démonstratif, c'est à dire les parties de démonstration qui consiste à ajouter au cours d'une démonstration des hypothèses ou des objets.

Il est indispensable d'analyser aussi des détails comme ceux décrits dans k), qui sont fondés sur des règles du type : on déduit immédiatement une affirmation de une ou deux affirmations antérieures.
Voici quelques-unes de ces règles.

1) **Règle du Modus Ponens**

MP
Si on sait déjà « A » et « si A alors B » , alors on peut en déduire « B » .

2) **Règles de la négation**

NEG 1

De « A »	on peut déduire « non (non A) »
De « non (non A) »	on peut déduire « A » .

NEG 2

De « non(A ou B) » » ,	on peut déduire « (non A) et (non B) » .
De « non(A et B) » ,	on peut déduire « (non A) ou (non B) » .
De « non(si A alors B) » ,	on peut déduire « A et (non B) » .
De « non(il existe x tel que A) » ,	on peut déduire « pour tout x, (non A) » .
De « non(pour tout x, A) » ,	on peut déduire « il existe x tel que (non A) » .

NEG 3
« A ou (non A) » est vraie.

NEG 4

De « A » et de « non A » ,	on peut déduire « contradiction » .

3) **Règles du « et »**

ET1
De « A » et de « B » , on peut déduire « A et B » .
ET2
De « A et B » , on peut déduire « A » d'une part
on peut déduire « B » d'autre part.

4) **Règle du « ou »**

OU
De « A » , on peut déduire « A ou B » .
on peut déduire « B ou A » .

5) **Règle du « quelque soit » : $\forall$**
Si « tout objet possède la propriété A » et si x est un objet du contexte alors x vérifie la propriété A.

6) **Règle du « il existe » : $\exists$**
De l'hypothèse « a possède la propriété P » , on déduit « il existe un objet qui possède la propriété P » . Cet objet a peut faire partie des données ou provenir d'un Nomobj ou d'un Gen antérieur.

7) **Règle de l'équivalence des sous-formules**
EQ Si on a démontré que « A si et seulement si B » , et si dans une phrase vraie on remplace A par B, la phrase obtenue est vraie.

8) **Règle de l'égalité**
EG Si deux objets sont égaux, ils possèdent les mêmes propriétés.

2.3 LES RÉSULTATS EXTÉRIEURS

Il est important, quand on analyse une démonstration, d'être capable d'énoncer de manière précise les résultats (théorèmes, propriétés ou définitions) qui sont utilisés plus ou moins implicitement.

Là encore, il y a une part d'interprétation. Le choix se fera en tenant compte de ce que, a priori, ce résultat doit être énoncé dans le document dont le texte est extrait ou doit être un résultat connu du lecteur potentiel de la démonstration.

2.4 EXEMPLE D'ANALYSE DÉTAILLÉE

Il peut être interessant de faire une analyse détaillée d'une partie ne comportant que des règles de conséquences immédiates. Nous avons choisi la partie encadrée, page 7.

A cet endroit de la démonstration, on a comme hypothèses (en particulier) :

H1 $rs = p$ et $r \neq 1$ et $s \neq 1$
H2 p est le plus petit diviseur de n plus grand que 1.

On se servira de quatre résultats extérieurs : RE4, RE5, RE6 et RE7.

Cette analyse très détaillée est évidemment assez factice. Elle n'apporte pas ici en effet une amélioration décisive de la compréhension. Cependant, elle peut être utile dans des points délicats de démonstration que l'on souhaite alors regarder au microscope.

Plus généralement, elle permet de dégager de manière précise tous les résultats implicites qu'utilise la démonstration.

ANALYSE DÉTAILLÉE

$p > 1$	H2	(ET2)
$rs = p$, $r \neq 1$ et $s \neq 1$		H1
$p > 1$, $rs = p$, $r \neq 1$ et $s \neq 1$		(ET1)
Si $p > 1$, $rs = p$, $r \neq 1$ et $s \neq 1$ alors $r > 1$ et $r < p$		(RE6) ($\forall$)
$r > 1$ et $r < p$		(MP)
$r > 1$		(ET2)
Il existe y tel que $ry = p$		($\exists$)
Il existe y tel que $ry = p$ équivalent à r divise p		(RE4) ($\forall$)
r divise p		(MP)
p divise n	H2	(ET2)
r divise p et p divise n		(ET1)
Si r divise p et si p divise n alors r divise n		(RE5) ($\forall$)
r divise n		(MP)
r divise n et $r > 1$		(ET1)
Tout diviseur de n plus grand que 1 est plus grand ou égal à p	H2	(ET2)
Si r divise n et $r > 1$, r est plus grand ou égal à p		($\forall$)
$r \geq p$		(MP)
Si $r \geq p$, il n'est pas plus petit que p		(RE7) ($\forall$)
r n'est pas plus petit que p		(MP)
$r < p$		(ET2)
Contradiction		(NEG4)

RE4	Pour tout a et b entiers, a divise b est équivalent à il existe un entier c tel que $ac = b$.
RE5	Pour tout a, b et c entiers, si a divise b et si b divise c alors a divise c.
RE6	Pour tout a, b et c entiers, si $a > 1$, $bc = a$, $b \neq 1$ et $c \neq 1$, on a $1 < b < a$.
RE7	Pour tout a et b entiers, si $a \geq b$ alors non $(a < b)$.

On peut présenter ce type d'analyse sous la forme d'un organigramme. Mais cette présentation, utile pour analyser un enchaînement de pas, est tout à fait inadaptée dans le cas où la partie de démonstration que l'on analyse comporte l'usage de démarches avec adjonction d'hypothèses ou d'objets.

2.5 Présentation pratique de l'analyse d'une démonstration

Nous en donnons un exemple à la page suivante. C'est une analyse un peu plus détaillée de la démonstration du théorème :

Tout nombre entier plus grand que 1 possède un diviseur premier.

Ce ne peut être qu'un compromis entre une analyse très complète mais qui serait illisible et une analyse ne comportant que les étapes importantes comme celle de la page 7.

Cependant, il semble qu'elle doit comporter au minimum :

- Une présentation de toutes les étapes correspondant à une démarche où l'on ajoute des hypothèses ou des objets (démarches principales),
- Une liste complète des résultats extérieurs (théorèmes , propriétés, définitions) utilisés.

On peut remarquer dans cette analyse de démonstration à l'aide du langage de description, que si à un endroit d'une démonstration on choisit une démarche qui ajoute l'hypothèse H1, puis avant d'avoir abandonné cette hypothèse H1 on ajoute une nouvelle hypothèse H2, alors l'hypothèse H2 sera abandonnée avant l'hypothèse H1.

Dans le langage de description, à un endroit donné de la démonstration, une hypothèse supplémentaire est valable si elle est contenue dans une colonne qui est à gauche (au sens large) de cet endroit et si elle est la dernière hypothèse ajoutée dans cette colonne, c'est à dire si la fin de cette hypothèse n'est pas encore déclarée.

Souvent la structure des démonstrations est rendue peu apparente par la rédaction choisie. L'analyse dans le langage de description permet de trouver une rédaction plus claire. Il arrive cependant que cette nouvelle rédaction ne soit pas « meilleure » car si sa structure, du point de vue logique, est plus apparente, les idée intuitives sous-jacentes ont pu disparaître complètement.

Voici tout d'abord la liste des résultats extérieurs utilisés dans cette démonstration.

RE1 tout entier se divise lui-même
RE2 tout entier plus grand que 1 a un plus petit diviseur plus grand que 1
RE3 Définition d'un nombre premier
RE4 Pour tout a et b entiers, a divise b est équivalent à
il existe un entier c tel que $ac = b$.
RE5 Pour tout a, b et c entiers, si a divise b et si b divise c alors a divise c.
RE6 Pour tout a, b et c entiers, si $a > 1$, $bc = a$, $b \neq 1$ et $c \neq 1$, on a $1 < b < a$.
RE7 Pour tout a et b entiers, si $a \geq b$ alors non $(a < b)$.

Gen n

Hypaux n est un entier plus grand que 1.

Cas n est premier ou n n'est pas premier (NEG 3).

1er cas n est premier.

n divise n (RE1).

n est premier et n divise n (ET1).

n a un diviseur premier ($\exists$).

Fin 1er cas

2ème cas n n'est pas premier.

n a un diviseur plus grand que 1 et plus petit que tous les autres diviseurs de n (RE2)

Nomobj p, $p > 1$ et p divise n et p plus petit que les autres diviseurs de n plus grands que 1.

Abs p n'est pas premier.

il existe deux nombres > 1 dont le produit est p (RE3) (NEG).

Nomobj : $r,\ s,\ rs = p$ et $r \neq 1$ et $s \neq 1$.

p divise n	(ET2).
r divise p	(RE4).
r divise n	(RE5).
$r > 1$ et $r < p$	(RE6).
$p \leq r$	($\forall$) (MP) (ET1) (ET2)
$r < p$	(ET2).
non ($p \leq r$)	(RE7).
Contradiction	(NEG4)

Finnomobj

Contradiction

Finabs

p est premier

p divise n (ET2)

p est premier et p divise n (ET1)

n a un diviseur premier ($\exists$)

Finnomobj

n a un diviseur premier.

Fin 2ème cas

Fincas

n a un diviseur premier.

Finhypaux

Si n est un entier plus grand que 1, n a un diviseur premier.

Fingen

Tout nombre entier plus grand que 1 a un diviseur premier.

3 Quelques idées pour écrire une démonstration

Nous venons de dégager de nombreuses démarches de démonstration. Essayons de comprendre pourquoi il semble aisé à ceux qui maîtrise la démonstration de jongler avec elles. Quand on commence à rédiger une démonstration il est naturel d'examiner la forme des propositions qui sont des données et surtout la forme de la proposition que l'on cherche à démontrer. Ces propositions vont se présenter sous des formes diverses :
non P, P ou Q, P et Q, $P \Rightarrow Q$, $(\forall x)P$, $(\exists x)P$.
Or il semble qu'il y ait une démarche canonique associée à chacune des formes de proposition que l'on rencontre comme donnée ou que l'on recherche comme conclusion. Cela conduit implicitement à des stratégies très simples pour écrire une démonstration : je m'intéresse à la forme d'une des propositions : en général la conclusion, ou parfois une des données et j'applique la démarche que me suggère cette analyse. (voir le tableau de la page suivante)

L'objectif de l'enseignement secondaire ne peut être d'enseigner les stratégies que suggère notre classification et qui sont très implicites dans l'esprit des enseignants. Simplement il faut faciliter la prise de conscience par les élèves de celles qu'ils ont l'occasion d'utiliser.

La recherche d'un contre-exemple rentre tout à fait dans ce cadre : il s'agit de démontrer la négation d'une proposition de la forme $(\forall x)P(x)$; cela revient à montrer que $(\exists x) non P(x)$; il est alors naturel de rechercher un objet a qui vérifie non P(a) : c'est un contre exemple.

Il est important de noter qu'il reste **beaucoup de liberté** dans l'écriture d'une démonstration, puisqu'on peut l'entreprendre en s'intéressant soit à la conclusion soit à l'une des données utiles. Cette liberté est encore accrue par l'existence de multiples démarches concernant la négation : à chaque étape d'une démonstration on peut s'engager dans une démonstration par l'absurde, ou faire une disjonction de cas à partir d'une proposition de la forme « P ou non P » judicieusement choisie.

Pour montrer « si A alors B » , on peut par exemple

- Utiliser l'hypothèse auxiliaire « A » et démontrer « B » .
- Raisonner par **contraposée**, en montrant « si non B alors non A »
- Raisonner par l'absurde en supposant A et non B pour trouver une contradiction
- Supposer A (Hypothèse auxiliaire), puis raisonner par l'absurde ; « si non B.... »
- Etudier des cas adaptés au contexte d'une étape des démonstrations précédentes.
- Conclure directement en sachant non A, ou bien en sachant B
  (méthode très rarement utilisée dans une démonstration)
  etc

On peut aussi choisir de résoudre un sous problème, c'est à dire travailler autour d'une proposition qui semble plus aisée à montrer que la conclusion du problème.

Il peut être interessant de concevoir avec des élèves des activités concernant les différentes démonstrations trouvées pour une même question et même, avec une démonstration de structure identique, les différents mots qu'ils ont utilisés pour l'écrire, d'analyser avec eux leur langage : la démonstration écrite par l'autre est elle correcte ? Ont-ils une idée pour écrire la même démonstration avec d'autres mots.

La forme des propositions et les démarches de démonstrations

Pour obtenir une conclusion de la forme	**On peut**
Si P alors Q	utiliser l'hypothèse auxiliaire **(Hypaux)**
P ou Q	démontrer P ou démontrer Q **(OU)**
P et Q	montrer P d'une part et Q d'autre part **(ET1)**
$(\forall x)P(x)$	utiliser une généralisation **(Gen)**
$(\exists x)P(x)$	trouver un objet a pour lequel on peut démontrer P(a) $(\exists)$
Pour utiliser une donnée ou un théorème de la forme	**On peut**
Si P alors Q	faire un pas de démonstration **(M.P)**
P ou Q	utiliser la disjonction des cas **(Cas)**
P et Q	utiliser comme donnée P d'une part et Q d'autre part **(ET2)**
$(\forall x)P(x)$	montrer P(a) pour un objet quelconque a $(\forall)$
$(\exists x)P(x)$	utiliser le choix d'un objet **(Nomobj)**

Une démonstration se situe toujours dans un cadre de référence qui est plus ou moins sous entendu. Dans certains cas, il s'agit d'un ensemble auquel les objets dont on parle appartiennent. Par exemple dans la démonstration analysée, les objets sont des entiers et on parle du « nombre p » sans préciser l'ensemble de référence. En géométrie, le cadre de référence est plus complexe. Il y a plusieurs sorte d'objets et de nombreux symboles. Par exemple quand au cours d'une démonstration, on parle de la hauteur (AH) du triangle ABC, il est inutile de rappeler que A, B, C sont des points ! (ni même que (AH) est une droite).

En ce qui concerne les quantificateurs, on peut constater qu'il y en a très peu d'exprimé dans les textes de démonstration. Deux phénomènes se conjuguent

1. Un phénomène superficiel qui fait que dans les énoncés avec un $\forall$, celui-ci est souvent sous-entendu ou remplacé par un article indéfini, par exemple « Dans un triangle. . . . »
2. Un phénomène structurel qui fait que pour faire une démonstration le mathématicien se débarrasse le plus vite possible des quantificateurs.

   – Si une hypothèse de la forme $(\exists x)$ A se présente, on s'empresse de faire disparaître le $\exists$ en utilisant l'expression : « soit y tel que A » .

   – Pour utiliser une hypothèse de la forme $(\forall x)A(x)$ on ne se sert que d'énoncés sans quantificateur de la forme A (a) où a est un objet judicieusement choisi dans le contexte.

   – Si on veut aboutir à une conclusion de la forme $(\forall x)A(x)$, on se débarasse du $\forall$ en choisissant une nouvelle lettre y (« Soit y ») et en démontrant A(y).

   – Enfin, si on veut aboutir à une conclusion de la forme $(\exists x)A(x)$, il suffit de construire un objet satisfaisant A ou d'utiliser un théorème d'existence.

Il est donc rare, contrairement à ce que pensent certains, que la rédaction d'une démonstration se présente sous la forme d'une liste de formules précédées chacune de plusieurs $\exists$ ou $\forall$.

4 Exercices d'analyse de démonstration

Voici des textes de démonstration. Analyser ces textes en utilisant le langage de description. On énoncera tous les résultats extérieurs utilisées.

4.1 Janvier 95

Énoncé *: Soit E est un ensemble non vide de points du plan ayant moins de trois éléments. S'il existe une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui laisse E invariant, E est réduit à un point.*

Démonstration *: Soit r une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui laisse E invariant. Soit O le centre de cette rotation.*
Soit M un point de E. Supposons que M soit différent de $r(M)$. Montrons que, dans ce cas, $M, r(M), r(r(M))$ sont trois points différents.
On sait déjà que M et $r(M)$ sont distincts. Puisque r est une application bijective on en déduit que $r(M)$ et $r(r(M))$ le sont aussi. Il reste à montrer que M est distinct de $r(r(M))$. Si ces deux points étaient confondus, M serait égal à O, puisque $r \circ r$ est rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ de centre O ; dans ce cas M serait égal à $r(M)$ ce qui est impossible.
Comme M appartient à E et que E est stable par r, $r(M)$ appartient aussi à E ; de même $r(r(M))$.
E aurait donc trois points distincts ce qui est contraire à l'hypothèse. On en conclut que $M = r(M)$ et, comme r est une rotation, que $M = O$.
On vient donc de démontrer que E est contenu dans $\{O\}$. Comme E est non vide il est égal à cet ensemble.

4.2 Isométrie involutive

Théorème *: Une isométrie involutive du plan qui ne possède pas deux points fixes distincts est une symétrie centrale.*

Démonstration

Soit i une isométrie involutive ne possèdant pas deux points fixes distincts. Comme i est involutive, on a $i \circ i = Id$.
Soit A un point du plan et U le milieu de $[A, i(A)]$; d'après une propriété connue, $i(U)$ est alors le milieu de $[i(A), i(i(A))]$ et, comme

$$i(i(A)) = (i \circ i)(A) = Id(A) = A,$$

$i(U)$ est le milieu de $[i(A), A]$. Comme il en est de même de U on a $i(U) = U$. En d'autres termes, U est un point fixe pour i.
Soit M du plan, le raisonnement déjà fait pour A prouve que le milieu de $[M, i(M)]$ est fixe pour i, donc est confondu avec U, car i ne possède qu'un point fixe. $i(M)$ est donc l'image de M par la symétrie centrale.
Ainsi, i est une symétrie centrale.

4.3 Janvier 1999

Théorème : *Toute isométrie du plan affine différente de l'identité est le composé d'au plus trois symétries orthogonales.*

Démonstration :

Soit i une isométrie du plan différente de l'identité.
Soit A un point du plan tel que $A' = i(A)$ soit différent de A. Soit D_a la médiatrice de $[A, A']$ et S_a la symétrie orthogonale par rapport à D_a.
A est un point fixe de $S_a \circ i$ car $S_a(A') = A$.
Si $S_a \circ i = I$, on a $i = S_a$ et le problème est résolu.
Sinon $S_a \circ i \neq Id$. Donc il existe B tel que $B' = S_a \circ i(B)$ soit différent de B. Soit D_b la médiatrice de $[B, B']$ et S_b la symétrie orthogonale par rapport à D_b. On remarque que B est un point fixe de $S_b \circ S_a \circ i$.
$S_a \circ i$ étant une isométrie, on a $AB = AB'$. Donc A est sur D_b et de là A est un point fixe de $S_b \circ S_a \circ i$.
Comme A est un point fixe de $S_a \circ i$, on a $B \neq A$ et on peut parler de la droite (AB) et d'après ce qui précède, cette droite est fixe sous $S_b \circ S_a \circ i$.
Si $S_b \circ S_a \circ i = Id$ on a $i = S_a \circ S_b$ et le problème est résolu. Dans le cas contraire il existe C tel que $C' = S_b \circ S_a \circ i(C)$ soit différent de C.
Considérons alors D_c la médiatrice de $[C, C']$ et S_c la symétrie orthogonale par rapport àD_c. Comme A et B sont fixes sous $S_b o S_a o i$, on a $AC = AC'$ et $BC = BC'$.
On en déduit que $S_c(A) = A$ et $S_c(B) = B$.
Or C n'est pas sur la droite (AB), sinon, comme la droite (AB) est fixe sous $S_b \circ S_a \circ i$, on en déduirait que $C = C'$.
Et de là, $S_c \circ S_b \circ S_a \circ i$ a pour point fixes les trois points non alignés A, B, C. Cette isométrie est donc l'identité et de là $i = S_a \circ S_b \circ S_c$. CQFD

4.4 Janvier 2000

Préciser les endroits où l'on applique la règle **OU**.

Théorème : *Soit n un entier, $n > 1$, tel que n ne divise pas (n-1)! alors soit n est premier, soit n est égal à 4.*

Démonstration :

Soit n un entier, $n > 1$, tel que n ne divise pas $(n-1)!$.
Le résultat est clair pour n=2, n=3, ainsi que pour n=4.
Soit $n > 4$. Supposons que n=ab avec $1 < a < n$ et $1 < b < n$.
Si $a = b$ alors $n = a^2$ avec $a > 2$ puisque $n > 4$. On en déduit $n > 2a$.
Ainsi a et $2a$ sont deux entiers, distincts, compris entre 1 et $n-1$. Donc $2a^2$ divise $(n-1)!$ et de là, n divise $(n-1)!$. On a une contradiction.
Maintenant, a et b jouant des rôles analogues, supposons par exemple $a < b$. donc a et b sont deux entiers distincts de la suite $1, 2, ..., n-1$. Donc n divise encore $(n-1)!$. On a aussi une contradiction.
n est donc premier. Ce qui achève la démonstration du théorème.

4.5 Janvier 97

En considérant ces deux lemmes comme des résultats extérieurs analyser le texte de la démonstration du théorème. On mentionnera l'endroit où la règle du « ou » s'applique.

Lemme 1 *: Soient x, y, z trois nombres entiers ≥ 1, tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Alors x est pair ou y est pair.*

Lemme 2 *: Soient x, y, z trois nombres entiers ≥ 1, tels que $x^2 + y^2 = z^2$.*
Si ces trois nombres sont premiers entre eux deux à deux avec x et z impairs et y pair alors il existe u et v entiers tels qu'on ait

$$x = u^2 - v^2,\ y = 2uv,\ z = u^2 + v^2$$

Théorème *:*
Soient x, y, z trois nombres entiers ≥ 1, tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Alors il existe d, u et v entiers tels que, à une permutation près de x et y, on ait

$$x = d(u^2 - v^2),\ y = 2duv,\ z = d(u^2 + v^2)$$

Démonstration *: Soient x, y, z trois nombres entiers ≥ 1, tels que $x^2 + y^2 = z^2$.*
Quitte à diviser par leur pgcd : d, on peut les supposer premiers entre eux dans leur ensemble.
Ils sont alors premiers entre eux deux à deux, car, par exemple, si x et z ont un facteur premier commun p, alors p divise $y^2 = z^2 - x^2$, et donc divise y.
Or, d'après le lemme 1, x ou y est pair. On a donc après un échange éventuel de x et de y, x impair, y pair et z impair puisque, x, y et z étant premiers entre eux deux à deux, un seul d'entre eux est pair.
On applique alors le lemme 2 et on aboutit au théorème en multipliant le résultat par le pgcd.

4.6 Septembre 97

Enoncé *: Soit A et B deux parties bornées, non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer sa borne supérieure.*
Démonstration
Soit $M_1 = Sup(A)$ et $M_2 = Sup(B)$. Considérons $M' = Max(M_1, M_2)$. M' est un majorant de $A \cup B$. En effet, si par exemple x est dans A on a bien $x \leq M_1 \leq M'$ et de même si x est dans B. Ainsi $A \cup B$ est majoré par M'.
Montrons que $M' = Sup(A \cup B)$.
Dans le cas contraire $A \cup B$ aurait un majorant $m < M'$.
Comme $A \subset A \cup B$, si x est un élément de A, x est dans $A \cup B$ et donc est inférieur au majorant m de $A \cup B$. Ainsi m est un majorant de A. On en déduit que $m \geq M_1$ (le plus petit des majorants de A). De même $m \geq M_2$. Il en résulte $m \geq M'$.
Ainsi M' est bien la borne supérieur de $A \cup B$.

Donner un texte de démonstration, de structure plus simple, variante de la démonstration précédente à partir de la phrase :
« Montrons que $M' = Sup(A \cup B)$ .. » ,
dont l'analyse commencerait à cet endroit par :
« GenHypaux m, majorant de $A \cup B$ » .
On ne demande pas de faire l'analyse de cette variante.

4.7 Mai 98

Rappel :
Un déplacement est une isométrie positive, c'est à dire composée d'une translation et d'une rotation.
Un retournement est une isométrie négative. On peut l'écrire comme composé d'une symétrie orthogonale et d'un déplacement.

Théorème *: Toute isométrie du plan affine est un déplacement ou un retournement.*
Démonstration *:*
- Soit i une isométrie du plan. Soient A et B deux points distincts du plan et A' et B' leurs transformés par i.
Considérons l'unique déplacement d tel que $d(A) = A'$ et $d(B) = B'$.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $(A'B')$.
Comme en restriction à une droite une isométrie est entièrement déterminée par l'image de deux points, les tranformations i, d et $s \circ d$ coïncident en restriction à la droite (AB).

Soit C un point arbitraire du plan non aligné avec A et B.
Ses transformés, $C' = i(C)$ et $C'' = d(C)$ sont tels que $C'A' = C''A'$ et $C'B' = C''B'$. Donc C' et C'' sont, soit symétriques par rapport à $(A'B')$, soit confondus.
- Si C' et C'' sont confondus, la même conclusion s'applique aux deux transformés $P' = i(P)$ et $P'' = d(P)$ d'un point arbitraire P du plan non aligné avec A et B. En effet, si P' et P'' n'étaient pas confondus, on aurait, par le même raisonnement que pour C, $P' = s(P'')$. Mais alors $C'P'$ ne pourrait être égal à $C'P''$ puisque C' n'est pas sur $(A'B')$. De là, en utilisant la remarque ci-dessus, on a $i = d$.
- Si C' et C'' sont symétriques par rapport à $(A'B')$ alors les transformés P' et P'' d'un point arbitraire P du plan non aligné avec A et B le sont aussi, sinon un raisonnement analogue au précédent aboutit à une contradiction. Et donc $i = s \circ d$.

Il résulte bien de là que i est, soit un déplacement, soit un retournement.

4.8 Septembre 98

Rappel de géométrie : Une isométrie du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ *est une transformation qui conserve les distances. Une isométrie du plan est soit une rotation, soit le composé d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.*
Le groupe diédral d'ordre $2m$*,* $(m \geq 1)$ *se caractérise, à isomorphisme près, par deux générateurs* r *et* s *vérifiant les relations :* $r^m = Id,\ s^2 = Id$ *et* $sr = r^{-1}s$

Théorème *: Soit* G *un groupe fini d'isométrie du plan euclidien* $\mathbb{R}^2$*. Alors* G *est soit cyclique, soit isomorphe à un groupe diédral d'ordre* $2m$*.*
Démonstration
Montrons d'abord que si H *est un groupe fini d'isométrie du plan euclidien ne contenant que des rotations alors* H *est cyclique*
Si H*=Id alors* H *est cyclique d'ordre 1.*
Supposons que $H \neq \{Id\}$ *ne contiennent que des rotations.*
soit $\theta \in [0, 2\pi[$ *l'angle minimal d'une rotation* $r \neq Id$ *appartenant à* H*. Vérifions que r engendre* H*.*
Dans le cas contraire, on aurait, dans H*, une rotation* r' *d'angle* $\theta' \in [0, 2\pi[$ *telle que* r' *n'appartiennent pas au sous-groupe de* H *engendré par* r*.*
Soit alors k, entier tel que $k\theta \leq \theta' < (k+1)\theta$*. On a* $\theta' \neq k\theta$ *car sinon* r' *serait dans le groupe engendré par* r*.*
Mais la rotation $r' \circ r^{-k}$ *appartient à* H *et l'angle de cette rotation,* $\theta' - k\theta$ *est tel que* $0 < \theta' - k\theta < \theta$*. Ce qui est absurde. Ainsi dans ce cas* r *engendre* H *et* H *est cyclique.*
Soit G *un groupe fini d'isométrie du plan euclidien* $\mathbb{R}^2$*.*
Si G *ne contient que des rotations alors d'après le résultat précédent* G *est cyclique.*
Dans le cas contraire G *contient une symétrie orthogonale* s*.*
Si l'on considère alors le sous groupe H *des rotations de* G*,* H *est fini, donc cyclique, engendré par une rotation* r *d'ordre* m *avec* $m \geq 1$*.*
Soit $g \in G$*. Si* $det(g) = +1$*,* $g \in H$ *et il existe* i *entier tel que* $g = r^i$*.*
Si $det(g) = -1$*,* $det(g \circ s) = +1$*, il existe* i *entier tel que* $g \circ s = r^i$ *et* $g = r^i \circ s$*.*
Ainsi r *et* s *engendrent* G *et vérifient les trois relations caractérisant le groupe diédral. CQFD.*

4.9 Janvier 02

Théorème : Une isométrie du plan, distincte de l'identité, qui possède deux points fixes distincts, est une symétrie orthogonale.

Démonstration
Soit f une isométrie, distincte de l'identité, possèdant deux points fixes A et B distincts. Nous allons démontrer que f est la symétrie orthogonale, s_{AB}, d'axe (AB). Soit M un point du plan. On note $M' = f(M)$.

Supposons $M \in (AB)$.
Si $M' \neq M$ alors, A et B étant des points fixes de f, ils sont équidistants de M et M'. A et B sont donc sur la médiatrice de $[MM']$ et ainsi (AB) est la médiatrice de $[MM']$. Mais la médiatrice de $[MM']$, ne saurait contenir le point M.
Donc, nécessairement, $M' = M$. On a bien, pour cet M, $f(M) = s_{AB}(M)$.

Étudions maintenant ce qui se passe pour un point $M \notin (AB)$.
Si $M' \neq M$, les mêmes arguments permettent de conclure que (AB) est la médiatrice de $[MM']$. Dans ce cas $f(M) = s_{AB}(M)$.

Montrons que le cas $M' = M$ n'est pas possible.
Comme $f \neq Id$ on peut trouver un point M_1 du plan tel que le point $M'_1 = f(M_1)$ soit distinct de M_1. Alors, comme f est une isométrie, les 3 points fixes de f, A, B, M, équidistants de M_1 et M'_1, seraient alignés sur la médiatrice de $[M_1M'_1]$. Mais alors, M serait sur (AB). Ceci est impossible.

Ainsi f est bien une symétrie orthogonale.

BIBLIOGRAPHIE AU SUJET DE LA DÉMONSTRATION

1. **Référence du cours**
   Jean Houdebine, La démonstration :
   Ecrire des mathématiques au collège et au lycée,
   Italo Giorgiutti, Dominique Hilt, Marie Annick Juhel, Jean Julo, Geneviève Mouraud,
   éditions Hachette, Paris, 1998

2. **D'autres livres**
   - Gilbert Arsac, Gisèle Chapiron, Alain Colonna, Gilles Germain, Yves Guichard, Michel Mante,
   Initiation au raisonnement déductif au collège,
   Presses universitaires de Lyon 1992

   - Alain Bouvier, La mystification mathématique,
   Hermann 1981

   - Imre Lakatos, Preuves et réfutations,
   éditions Hermann, 1984

   - Claude Margolinas, De l'importance du vrai et du faux,
   éditions La pensée sauvage 1996.

3. **Productions de l'IREM de Rennes :**
   - La démonstration en Seconde, 1995
   - Quelles lectures pour quelles tâches, 1996
   - Lire et écrire des textes mathématiques : vers la rédaction de démonstrations, 1992
   - Aides à la résolution de problème : Mise au point et expérimentation de quelques séquences avec utilisation de l'informatique, 1988
   - Actes du colloque de Rennes : Produire et Lire des textes de démonstration, 1998

4. **Productions d'autre IREM :**
   - Cycle d'observation : préparer à la démonstration,
   Rémi Duvert, IREM de Picardie, 1993
   - Le vrai et le faux en mathématiques au collège,
   Michèle Gandit et Marie Claire Demongeot, IREM de Grenoble, 1996
   - Le numéro 12 de Repères IREM, 1993 est consacré à la démonstration.
   - Raymond Duval et Agnès Egret :
   Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif,
   - Evelyne Barbin : Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration,
   - Freddy Bonafé : Narrations de recherche : un outil pour apprendre à démontrer.

5. **Autres Auteurs :**

   Nicolas Balacheff

   - Preuves et démonstration au collège

   Revue de didactique des mathématiques N°3-3, 1982

   - Etude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire,

   Thèse publiée à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1988.

   Gaud et Guichard ont été parmi les premiers dans les IREM à publier sur la démonstration. Il est intéressant de lire leur article dans le N°4 de Petit X (1984). Il faut lire en même temps la critique de ce travail faite par Mesquita et Rauscher dans Annales de didactique et de sciences cognitives N°1, Strasbourg, 1988

   Raymond Duval, dans de nombreux articles, aborde la démonstration comme un texte particulier. par exemple il analyse les différences entre argumentation et démonstration dans

   Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive, Raymond Duval, Petit X N°31, 1993

6. **A propos des liens entre figure et démonstrtion :**

   - Bergue et Al : De la figure vers la démonstration, Petit X N°27, 1991

   - Dessin géométrique de la main à l'ordinateur,

   Acte du colloque de l'IREM de Lille, 1994

   - Cabri géomètre,

   constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure,

   Colette Laborde et Bernard Capponi,

   Recherches en didactique des mathématiques, vol 14/1-2, 1994

7. **Pour les aspects historiques :**

   La démonstration mathématique dans l'histoire

   IREM de Besançon et IREM de Lyon, 1990.

8. **Pour l'aspect pluridisciplinaire :**

   La revue Cahiers Pédagogiques :

   - n° 316 sur Français et mathématiques, 1993

   - n° 344-345 sur le raisonnement, 1993