▸Le bonhomme
▸Le jeu du portrait

V. Les transformations

Une transformation du plan est une application du plan dans lui-même bijective.

A. Les programmes

<u>Cycle 2</u>

Dans l'item “Relations et propriétés”, il y a “*axe de symétrie*”.
*Il faut **percevoir** et **vérifier** l'existence d'un axe de symétrie. Les techniques (pliages, calque, papier quadrillé) sont mentionnées.*

<u>Cycle 3</u>

Dans l'item “Relations et propriétés”, il y a “*axe de symétrie*”.

- *percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie et le vérifier en utilisant différentes techniques (pliage, papier calque, miroir) ;*
- *compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que pliage, papier calque, miroir ;*
- *tracer, sur un papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée ;*
- *vocabulaire : figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite, axe de symétrie.*

Dans l'item “Agrandissement, réduction”

- *réaliser, dans des cas simples, des agrandissements ou des réductions de figures planes ;*
- *contrôler si une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure.*

Commentaires du programme :
L'aspect “transformation du plan” n'est pas explicite : on s'intéresse à une figure donnée.
Deux types de tâches se présentent :

• *Déterminer si une figure a un, ou plusieurs, axe(s) de symétrie.*
La donnée d'entrée est une figure. La donnée de sortie peut, selon la consigne, être un tracé des axes ou un texte donnant le nombre d'axes. Ce nombre peut être déterminé perceptivement ou avec une ou plusieurs des techniques possibles, selon la consigne donnée au départ.
Pour vérifier l'existence d'un axe, il faut d'abord être capable de formuler une hypothèse sur la position de celui-ci.
Pour trouver un axe de symétrie, l'élève peut soit repérer une sous-figure qui admet un axe de symétrie et vérifier que c'est aussi un axe de symétrie de toute la figure, soit trouver des éléments qui semblent symétriques (segments de même longueur ...) et chercher à préciser leur axe de symétrie. Pour vérifier que l'axe conjecturé est bien un axe de symétrie, il peut soit tracer (mentalement ou non) le symétrique de la figure par rapport à cet axe et vérifier qu'il retrouve la figure, soit effectuer mentalement le pliage et vérifier qu'il y a bien superposition des deux parties de la figure séparées par l'axe.

• *Tracer le symétrique d'une figure ou compléter une figure par symétrie*.
Ici les données d'entrée et de sortie sont des figures.

Quand il s'agit de compléter une figure, une variable importante est la partie de la figure donnée au départ : s'agit-il de la "moitié", ou a-t-on des éléments supplémentaires ?
Les nouveaux programmes précisent les procédures que les élèves peuvent utiliser, et sont donc restrictifs par rapport aux programmes précédents. Si l'élève peut utiliser le papier calque ou procéder par pliage, cela demande un minimum d'habilité (il ne faut pas oublier de retourner le calque, pas seulement de le faire glisser). S'il est sur papier blanc, il doit utiliser l'équerre et la règle graduée ; par contre sur papier quadrillé, si l'axe de symétrie est une des lignes du quadrillage, le travail est facilité par le fait que des perpendiculaires sont déjà tracées et qu'il suffit souvent de compter des carreaux.

B. Symétrie axiale, axe de symétrie

1. Définition en primaire d'une symétrie axiale

Deux figures sont symétriques par rapport à une droite *D* si, lorsque l'on plie la feuille suivant la droite *D,* ces deux figures se superposent (à vérifier par transparence).
▸France

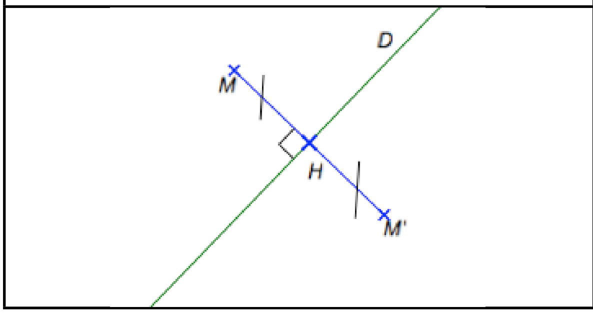
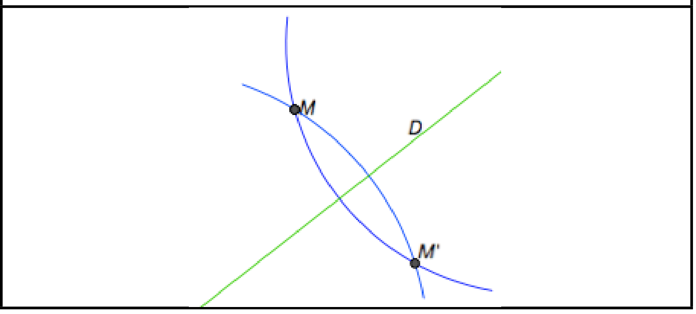
2. Définition mathématique d'une symétrie axiale

On parle (en géométrie plane) de symétrie orthogonale par rapport à une droite (axe) ou de réflexion. Le symétrique d'un point *M* par rapport à une droite *D* est

- le point *M'* tel que *D* soit la médiatrice de [*MM'*], si *M* n'est pas sur *D* ;
- le point *M* lui-même, si *M* est sur *D*.

Attention au vocabulaire : ***symétrie axiale*** sous-entend dans le programme du primaire qu'il s'agit d'une symétrie orthogonale (mais c'est quoi qui est orthogonal à quoi ??). N'oubliez pas qu'il existe des symétries par rapport à des droites qui ne sont pas des symétries orthogonales.

3. Méthodes de tracé

Avec une règle et un compas : on trace la perpendiculaire à *D* qui passe par *M*. Elle coupe *D* en *H*. On place ensuite le point *M'* sur cette perpendiculaire avec *MH=M'H*.	**Avec le compas uniquement** : on place deux points quelconques sur *D* et on trace deux arcs de cercle dont le centre est un de ces points et passant par *M* (ces deux arcs de cercle n'ont pas forcément le même rayon). Le deuxième point commun de ces deux arcs de cercle est le point *M'*.
	

4. Propriétés d'une symétrie axiale

Une symétrie est une application du plan bijective et involutive. Elle envoie chaque point du plan sur un point unique ; si on l'applique une deuxième fois, tous les points reviennent à leur position de départ.
Les points de l'axe sont invariants par la symétrie.

La symétrie axiale conserve :

- ★ l'alignement donc l'image d'une droite est une droite et, si un point est sur une droite, son symétrique est sur le symétrique de cette droite ;
- ★ la longueur donc l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
- ★ les angles donc l'image d'un angle est un angle de même mesure ;
- ★ les barycentres et en particulier les milieux.

Ces propriétés permettent de construire le symétrique d'un polygone en traçant les symétriques des sommets du polygone et en joignant ensuite les images (dans le bon ordre ...) et le symétrique d'un cercle en traçant le symétrique du centre et en traçant un cercle de même rayon.

5. Définition d'un axe de symétrie

Une figure *F* admet un axe de symétrie *D* si le symétrique par rapport à *D* de tout point de *F* appartient à *F*.
Pour rechercher un axe de symétrie, on peut essayer de plier mentalement la figure.
Remarque: une figure peut avoir plusieurs axes de symétrie (cf le carré)

C. Observations issues de recherche sur la symétrie (D. Grenier)

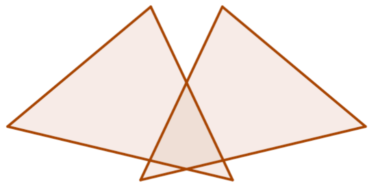
1. Déterminer si une figure a un, ou plusieurs axes de symétrie

Les variables didactiques liées à la recherche d'axes de symétrie :

- ***les outils dont dispose l'élève*** : s'il peut décalquer la figure, il peut essayer des pliages (idem s'il a le droit de plier la feuille). S'il ne peut plier la feuille ou utiliser du papier calque, il doit faire appel à une représentation mentale ;
- ***le support*** : papier quadrillé ou papier uni. S'il est sur papier quadrillé et que l'axe de symétrie correspond à une ligne du quadrillage, il peut mieux le visualiser et utiliser les carreaux pour vérifier la symétrie. Si l'axe de symétrie ne correspond pas à une ligne du quadrillage, la présence de ces lignes peut le tromper s'il ne cherche l'axe que parmi ces lignes. S'il est sur papier uni, il doit faire appel à une représentation mentale.
- ***l'orientation de l'axe*** : l'élève voit mieux les axes de symétrie horizontaux ou verticaux ;
- ***le nombre d'axes de symétrie*** : l'élève peut se satisfaire d'en avoir trouvé un ;
- ***les figures de base qui composent la figure*** : si la figure est composée de deux éléments isolés symétriques, l'élève reconnait facilement l'axe.

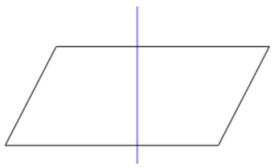
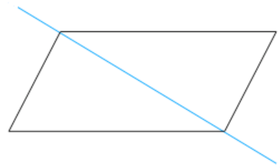
Exemple :

Par contre, si ces deux éléments se superposent, l'élève trouvera plus difficilement l'axe de symétrie :



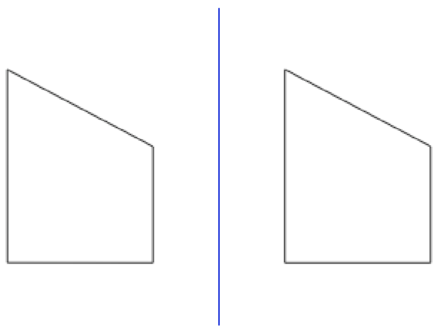
Conception des élèves :

- ***Utilisation du théorème-élève*** : “un axe de symétrie passe par le milieu de la figure”. Le mot milieu est utilisé aussi bien pour le milieu d’un segment, le centre d’un cercle ou que pour une droite qui partage la figure en deux figures superposables (mais en oubliant la rotation dans l’espace).

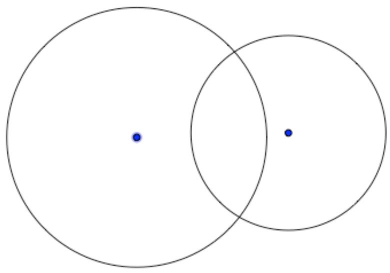
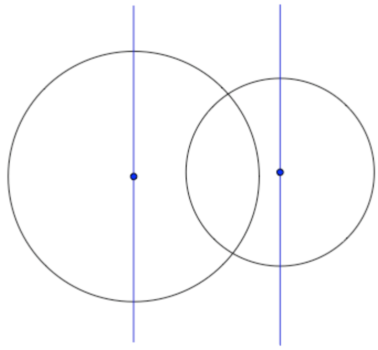
Déterminer, s’il existe, l’axe de symétrie de cette figure	Réponse de l’élève 1	Réponse de l’élève 2
		

L’élève 1 a tracé une droite verticale qui passe par le centre de la figure. L’élève a souvent rencontré des axes verticaux et qui passent par le centre de symétrie de la figure. Il en a conclu qu’un axe de symétrie est une droite verticale qui passe par le centre de symétrie de la figure.
L’élève 2 trace un axe qui partage la figure en deux figures superposables. Cet élève a conclu qu’un axe de symétrie est une droite qui partage la figure en deux figures superposables.

Une autre erreur commune provient de ce théorème-élève : il confond symétrie et translation :



- ***Privilégier les axes verticaux ou horizontaux*** : si la figure présente plusieurs axes de symétrie dont l’un vertical ou horizontal, l’élève ne voit que ce dernier (exemple du triangle équilatéral posé sur un de ses côtés). Si une figure admettant un axe de symétrie est représentée de telle sorte que l’axe ne soit ni vertical, ni horizontal, l’élève le verra plus difficilement.
- ***Plusieurs figures de base ayant un axe de symétrie*** : l’élève a tendance à assimiler l’axe de symétrie d’une des figures de base comme un axe de symétrie de

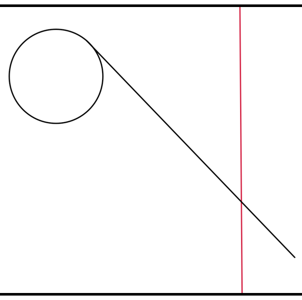
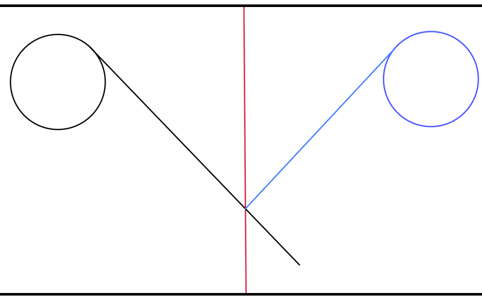
Déterminer, s'il(s) existe(nt), le (ou les) axe(s) de symétrie de cette figure	Réponse de l'élève
	

la figure complète.

2. Tracer le symétrique d'une figure ou compléter une figure par symétrie.

Les variables didactiques liées à la symétrie orthogonale :

- la consigne : peut-il plier la feuille, utiliser du papier calque ;
- l'intersection de la figure initiale avec l'axe de symétrie ;

Figure initiale	Réponse de l'élève
	

- les directions de l'axe et des éléments composant la figure ;
- la position de la figure par rapport aux limites de la feuille ;
- la distance à l'axe ;
- le type de papier (blanc ou quadrillé).

Conception des élèves :

"La figure symétrique d'une figure donnée est une figure de même forme et de même dimension située de l'autre côté de l'axe et à la même "distance" de l'axe de symétrie que la figure de départ" (la conservation des longueurs est un invariant moins stable que la conservation de la forme).
L'idée de la distance à l'axe de symétrie n'est pas toujours liée à l'orthogonalité : les élèves peuvent donc produire des figures translatées l'une de l'autre.
Les directions "horizontales" et "verticales" jouent un rôle perturbateur, accentué si le papier est quadrillé.
Pour construire le symétrique d'un segment, une **procédure** répandue est de construire le symétrique d'une extrémité, puis de tracer un segment dans une direction choisie (qui peut être celle du segment de départ quel que soit l'axe de symétrie). Le symétrique de l'autre extrémité est donc déduit et non construit.

Remarque : la vérification par pliage revient à utiliser le fait que la symétrie est une involution (elle est égale à son inverse). La vérification mentale implique de faire une rotation dans l'espace autour d'une droite.

D. Exemples d'activités sur les axes de symétrie et les symétries axiales

- évaluation de CE2 2001 : exercice 4 (55% des élèves parviennent à construire la figure symétrique).
- évaluation de CE2 1999 : exercice 4 (axes horizontal, vertical et oblique).
- évaluation de sixième 2001 : exercice 31 (72% des élèves trouvent les axes horizontaux et 50% seulement les trouvent s'ils sont obliques).
- évaluation de sixième 1999 : exercice 14 (38% des élèves dessinent les deux axes de symétrie du rectangle, 63% trouvent l'axe horizontal de la deuxième figure, 48% trouvent les axes obliques)
- le napperon : cycle 2 ou 3 suivant le modèle de napperon
- la peinture : début de cycle 3

E. Agrandissement, réduction

Cet item apparaît pour la première fois dans les programmes. Des tâches liées à cet item se trouvaient déjà dans les manuels, comme exercices portant sur la proportionnalité.
Les principales difficultés connues sont :

- comprendre ce que signifie agrandir ou réduire une figure avec un certain coefficient d'agrandissement. Faire un carré quatre fois plus grand signifie-t-il quadrupler l'aire du carré ou quadrupler la mesure de son côté ? (Pas le même sens que d'agrandir une maison...)
- remplacer les produits par des sommes, en ajoutant par exemple un nombre constant aux longueurs des côtés.

1. Comment réaliser un agrandissement (et qu'est-ce qu'un cas simple ?)

Les données d'entrée et de sortie sont des figures.
Une question se pose sur la définition du mot "agrandissement". S'agit-il d'effectuer une homothétie ou celle-ci peut-elle être suivie d'une isométrie (qui change la position de la figure dans la feuille) ?
Ici on va considérer seulement l'homothétie, ce qui est plus contraignant.
En général, l'agrandissement doit être réalisé à côté de la figure initiale ; les variables ne sont pas les mêmes s'il faut le faire sur une autre feuille.
La construction est basée sur les propriétés mathématiques de l'homothétie : elle conserve l'alignement, transforme toute droite en une droite parallèle, conserve les angles et les rapports de longueur et multiplie toutes les distances par un même coefficient.
Une fois choisi un point de départ pour la construction, il faut donc (dans le cas d'une figure polygonale) construire un côté de la figure image parallèle au côté de la figure initiale, et dont la longueur est obtenue en appliquant le coefficient multiplicatif. Ceci donne un deuxième point et on continue le processus.
La difficulté due aux tracés de droites parallèles implique que les "cas simples" seront probablement des figures avec des côtés "horizontaux" et "verticaux".
Le support (papier quadrillé ou non) est une variable fondamentale.
Il est également possible qu'une partie de la figure agrandie soit déjà donnée, et qu'il faille compléter celle-ci.
On sait dans ce cas que différentes procédures peuvent apparaître, selon l'emploi de rapports de longueur internes à la figure ou impliquant la partie à compléter, donc externes (voir le cas du rectangle).

2. Contrôler si une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre

La donnée d'entrée est un couple de figures.

Une réponse négative à la question peut provenir d'une évidence perceptive : si l'une des figures est polygonale et si l'autre contient une ligne courbe, par exemple.

Elle peut venir de la longueur des côtés, donnée ou à mesurer, qui peut également se présenter comme une évidence perceptive, si les rapports de longueurs ne sont pas respectés de manière évidente.

Une réponse positive est plus difficile à justifier. Un outil possible est le rétroprojecteur qui permet d'effectuer un agrandissement d'une des figures pour se ramener à une vérification de superposabilité.

F. Exemples d'activités sur les agrandissements et réductions

- le puzzle de Guy Brousseau
- évaluation de sixième 2000 : exercice 10.
- extrait d'un livre de CM1 : introduction à la notion d'agrandissement

VI. Les objets de l'espace

A. Les programmes

Cycle 2

Solides : cube, pavé droit
- *Distinguer ces solides de manière perceptive parmi d'autres solides*
- *Utiliser le vocabulaire approprié : cube, pavé droit, face, arête, sommet*

Cycle 3

Solides : cube, parallélépipède rectangle
- *Percevoir un solide, en donner le nom, vérifier certaines propriétés relatives aux faces ou aux arêtes d'un solide à l'aide d'instruments*
- *Décrire un solide en vue de l'identifier dans un lot de solides divers ou de le faire reproduire sans équivoque*
- *Construire un cube ou un parallélépipède rectangle*
- *Reconnaître, construire ou compléter un patron de cube ou de parallélépipède rectangle*
- *Utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : cube, parallélépipède rectangle ; sommet, arête, face*

Commentaires sur le programme :
Les mots *face, arête, sommet, cube, parallélépipède rectangle* doivent être connus.
On peut aussi rencontrer : tétraèdre, pyramide, prisme, polyèdre, cylindre, cône, sphère.
Il n'y a pas de définition mathématique de ces termes en primaire; il faut faire attention à rester cohérent dans l'usage que l'on en fait. En particulier, on ne parle pas de faces, d'arêtes ou de sommets pour des solides qui ne sont pas des polyèdres.
Si on définit une arête comme l'intersection de deux faces, il ne faut pas que le mot "arête" intervienne dans la définition du mot "face"...

B. Représenter sur un plan, interpréter une représentation plane

On est à nouveau dans le domaine de la structuration de l'espace.
Plusieurs types de représentations planes sont possibles ; on exclut, ici, les patrons dont on parlera dans la partie suivante.

1. Les représentations en perspective

Il y a plusieurs types de perspectives possibles qui sont toutes associées à des projections sur un plan.
Les représentations produites dépendent des propriétés mathématiques de ces projections (conservation de l'alignement, du parallélisme, des rapports de longueurs ; modification de certains angles et conservation d'autres...).
Il est très difficile pour les élèves de produire de telles représentations. Il est également difficile de les interpréter, d'autant plus que l'enseignant peut avoir l'illusion de la transparence de cette interprétation. Il est nécessaire de travailler explicitement l'interprétation, en soulignant par exemple le rôle des pointillés.

2. La représentation de vues d'un solide

Il s'agit de représenter des parties d'un solide qui sont “presque” déjà en dimension 2, mais qui peuvent se situer dans différents plans parallèles.
Une vue est une représentation plane obtenue par une projection orthogonale sur un plan parallèle à une face.
Il ne faut pas confondre les vues et les empreintes, obtenus en appuyant, par exemple, le solide sur de la pâte à modeler. Les empreintes sont une partie des vues correspondantes. L'empreinte d'une boule est un point alors sa vue de dessus est un disque.
Les erreurs les plus fréquentes, dans la représentation de vues, sont : oublier des parties ou en mettre trop. En particulier, les parties des vues qui sont en retrait, donc pas sur les empreintes, peuvent être oubliées.
Interpréter des vues exige souvent de coordonner plusieurs informations, plusieurs points de vue sur un objet (typiquement pour identifier ou construire un objet donné par des vues) ; c'est donc une tâche très difficile.

C. Construire des solides

On examine uniquement les patrons et on va se restreindre aux patrons de polyèdres.

1. Quelques définitions

Un **solide** est une figure indéformable à trois dimensions, limitée par une surface fermée.
Il existe deux types de solides : les **polyèdres** (exemple : le cube) délimités par une surface uniquement composée de polygones (ligne fermée brisée) et les non-polyèdres (exemple : le cylindre).
Les polygones délimitant le polyèdre sont appelés les **faces** du polyèdre, les côtés communs des polygones qui constituent les faces sont appelés les **arêtes** et les sommets des polygones sont encore appelés les **sommets** du polyèdre. On a la relation s+f=a+2.
Un polyèdre est dit **convexe** s'il se situe d'un même côté de chacun des plans définis par ses faces (c'est-à-dire que quelle que soit la façon dont on le pose sur une surface plane, il repose sur une face entière).
Un polyèdre est **régulier** lorsque :
- il est convexe
- toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques
- chacun de ses sommets part le même nombre d'arêtes formant le même angle.

Il existe seulement cinq polyèdres réguliers : le cube, le tétraèdre régulier (dont les 4 faces sont des triangles équilatéraux identiques), l'octaèdre régulier (dont les 8 faces sont des triangles équilatéraux identiques), l'icosaèdre régulier (dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux identiques) et le dodécaèdre régulier (dont les 12 faces sont des pentagones réguliers identiques).
Un **prisme droit** est un polyèdre dont la surface est composée de deux polygones identiques et parallèles (appelés bases) et de rectangles qui constituent les faces latérales.

Un **prisme non droit** est composé de deux bases qui sont des polygones identiques et parallèles. Ses faces latérales sont des parallélogrammes.
Une **pyramide** est un polyèdre dont la surface est composée d'un polygone appelée base et de triangles ayant un sommet commun.
Un **patron de polyèdre** est une figure plane d'un seul tenant qui est composée du dessin de chacune des faces du polyèdre. Chaque face est représentée une fois et une seule. La figure plane obtenue doit permettre par simple pliage de reconstruire le polyèdre.
On laisse de côté le problème des languettes (aspect technologique) qui peut créer des difficultés matérielles.

2. Les types de tâche

- un solide est donné physiquement, ou représenté en perspective, ou simplement décrit par une phrase, et il faut en donner le patron. Il faut donc connaître la description exhaustive des faces du solide et les dessiner toutes. De plus, elles doivent être placées de manière à ce que le pliage soit possible, qu'il n'y ait pas superposition des faces et que les relations d'adjacence des côtés soient respectées. C'est une tâche délicate car il y a toujours plusieurs solutions possibles. Une variable importante dans ce type de tâche est la possibilité ou non de manipuler le solide.
  Invalider un patron faux est simple, s'il n'y a pas les bonnes faces. S'il y a exactement les bonnes faces, cela reste simple si on a le droit de le découper pour tenter de reconstituer le solide. Sinon, cela nécessite une représentation mentale de l'objet obtenu par pliage par l'identification des côtés des faces qui formeront une arête etc.
- une figure plane est donnée et on demande si c'est un patron. Deux possibilités se présentent :
  - Soit on présente le solide censé y être associé. Ce solide, comme ci-dessus, peut être présenté physiquement, par un dessin ou par une phrase (“parmi ces figures, quelles sont celles qui sont des patrons de cubes ?”). On se retrouve avec une activité déjà évoquée : valider ou invalider un patron pour un solide donné.
  - Soit on demande simplement si cette figure permet de constituer par pliage, sans chevauchement, un solide fermé (on exclut généralement les boîtes). On peut éventuellement être conduit à compléter une figure pour en faire un patron si on identifie des faces manquantes. Si on n'a pas le droit au découpage (indispensable pour la validation), c'est une activité très délicate. Il faudra encore essayer d'identifier les côtés qui vont former des arêtes, mais aussi également visualiser ce qui manque.

Si, à partir d'une figure plane, on a le droit non seulement de plier mais aussi d'enrouler, on peut produire des dessins qui permettront de reconstituer des cylindres ou des cônes (qui ont des “faces latérales”). On ne pourra pas faire de patron d'une sphère...

▸ évaluation sixième 2005 : exercice 32 (reconnaître un patron de cube)

BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1999-2000), L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N n°65*, 37-59, IREM DE GRENOBLE

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (2000-2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège. *Petit x n°56*, 5-34, IREM DE GRENOBLE

FÉNICHEL M., PAUVERT M. et PFAFF N. (2004), Donner du sens aux mathématiques, Tome 1. Espace et géométrie. *Formation des enseignants. Bordas pédagogie*.

GRANGEAT M. (1994-1995), Découverte d'une notion, initialisation d'un apprentissage. *Grand N n°56, 43-53*, IREM DE GRENOBLE

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (1999), Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x n°51*, 5-21, IREM DE GRENOBLE

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2003), Quand deux droites sont "à peu près" parallèles ou le versant géométrique du "presque" égal. *Petit x n°61*, 61-74, IREM DE GRENOBLE

KUZNIAK A. (2001), Sur une approche intrinsèque de la géométrie enseignée. *Bulletin de l'APMEP n°435*, 507-518

PELTIER M.L. (2000-2001), Le napperon, un problème pour travailler sur la symétrie axiale. *Grand N n°68, 17-27*, IREM DE GRENOBLE

Programmes de primaire : http://www.education.gouv.fr/bo/2002/hs1/
Évaluations de rentrée en CE2 et en sixième : http://evace26.education.gouv.fr/