INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE DE RENNES
Université de Rennes 1 – U.R.A. C.N.R.S. 305

PRÉPUBLICATION

LEBAUD M.-P.

Description de la formation d'un choc dans le p-système

Prépublication 92-17 Octobre 1992

Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France
Tél. : 99 28 60 05 Fax : 99 28 67 90

DESCRIPTION DE LA FORMATION D'UN CHOC DANS LE P-SYSTEME.

M.P Lebaud

IRMAR
Université de Rennes I
F 35042 RENNES CEDEX

1. Introduction.

On considère un système de lois de conservation donné par :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[\times \mathbb{R} \tag{1.1}$$

où u et $f(u)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse aux solutions de ce système vérifiant la condition de Cauchy suivante :

$$u(0, x) = u_0(x) \tag{1.2}$$

et présentant un choc à un certain temps t_0. Les fonctions f et u_0 sont supposées assez régulières pour que les singularités de la solution ne proviennent pas de singularités des données.

Le système (1.1) est supposé strictement hyperbolique, i.e que la matrice $f'(u)$ admet n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_n(u)$. On se place également dans le cas où ces valeurs propres sont vraiment non linéaires, i.e grad $\lambda_i(u).r_i(u) \neq O, \forall u$ où $r_i(u)$ est un vecteur propre associé à $\lambda_i(u)$.

Si la fonction f n'est pas linéaire, le système (1.1) et (1.2) n'admet en général pas de solution régulière globale ([11] à [17],[8], ...) mais il admet des solutions faibles ([14],[20]) si la donnée initiale est assez petite.

F. John [8] a montré que si le problème (1.1) et (1.2) est vraiment non linéaire et si u_0 vérifie certaines hypothèses, alors les dérivées premières de u explosent en un temps fini (voir aussi [19]). T.P Liu [17] donne un résultat comparable et montre qu'un système dont les valeurs propres sont vraiment non linéaires ou linéairement dégénérées et dont la donnée initiale est à support compact a une solution présentant une singularité en un temps fini. On sait également qu'un système 2-2 dont les valeurs propres ne sont pas linéairement dégénérées à l'instant initial donne des solutions singulières pour toute donnée initiale non triviale régulière et à support compact ([9]).

Tout au long de cet article, on dira que u est une solution de (1.1)(1.2) "*présentant un choc au point* (t_0, x_0) *le long de la demi-courbe* γ *d'équation* $\{ x = \varphi(t) \,;\, t \geqslant t_0 \}$ " si :

- γ vérifie l'équation de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} \sigma\, [\, u\,] = [\, f(u)\,] \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma(t) = \varphi'(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

où $[u]$ représente le saut de la fonction u.

- $u \in C^1(\Omega \setminus \gamma)$ où Ω est un voisinage de (t_0, x_0)
- u est solution de (1.1)(1.2) à droite et à gauche de γ
- u et continue à droite et à gauche de γ en tout point de γ et admet des dérivées partielles continues à droite et à gauche de γ sur $\gamma \setminus (t_0, x_0)$.

On sait que la singularité qui apparaît dans le cas d'une loi scalaire est un choc ([14]). Le but de cet article est de décrire le même genre de singularités pour le p-système : on travaille avec une onde simple, i.e qu'avant un certain instant t_0, l'un des invariants de Riemann est constant ; on montre alors que le deuxième va présenter un choc et que des singularités faibles vont apparaître sur celui qui était constant à l'instant initial.

Précisons d'abord les notations. On se donne une fonction régulière p définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x v \quad\; = 0 \\ \partial_t v + \partial_x p(u) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

On suppose que ce système est strictement hyperbolique et que ses valeurs propres sont vraiment non linéaires. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} p'(x) < 0 \\ p''(x) > 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

On va travailler avec les invariants de Riemann qui permettent de diagonaliser un système 2-2. Si on définit une fonction F par :

$$F'(u) = \sqrt{-p'(u)}, \tag{1.6}$$

alors les invariants de Riemann sont :

$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{2}(v - F(u)) \\ z = \dfrac{1}{2}(v + F(u)) \end{cases} \tag{1.7}$$

On remarque que la fonction F' est strictement positive donc on peut définir la fonction réciproque de F et on pose :

$$\begin{cases} G = F^{-1} \\ H = -p(G) \end{cases} \tag{1.8}$$

On vérifie alors que :

$$\begin{cases} H'G' = 1 \\ \quad H' > 0 \qquad G' > 0 \\ \quad H'' < 0 \qquad G'' > 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

On suppose que les fonctions H et G sont de classe C^{p+1} sur $\mathbb{R}$ avec $p \geqslant 4$.

Pour une solution régulière, le système (1.4) s'écrit aux moyens de ses invariants de Riemann sous la forme diagonale suivante :

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_t w + H'(z-w)\partial_x w = 0 \\ &\partial_t z - H'(z-w)\partial_x z \ = 0 \end{aligned}\right. \tag{1.10}$$

Pour travailler sur une onde simple, on choisit de prendre comme conditions de Cauchy :

$$\left\{\begin{aligned} &w(0,x) = \text{constante} \\ &z(0,x) = z_0(x) \text{ avec } z_0 \in L^\infty \cap C^p(\mathbb{R}) \end{aligned}\right. \tag{1.11}$$

La définition de la fonction F nous permet de prendre la constante égale à zéro sans modifier le problème.

On considère les fonctions $w^0 = 0$ et z^0 solution de la loi de conservation scalaire :

$$\left\{\begin{aligned} \partial_t z - \partial_x H(z) &= 0 \\ z(0,x) &= z_0(x) \end{aligned}\right. \tag{1.12}$$

Si z^0 est régulière, alors (w^0, z^0) est solution forte de (1.10)(1.11) mais cette identité n'est plus forcément vraie s'il s'agit d'une solution faible. On sait alors parfaitement décrire la solution du p-système (1.10)(1.11) lorsqu'elle est régulière, c'est-à-dire avant l'apparition du choc, si on a affaire à une onde simple.

On se place dans le cas générique d'apparition d'une singularité pour la loi scalaire et on prend alors comme hypothèses :

$$g(x) = -H'\big(z_0(x)\big) \ \in C^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \text{ avec } p \geqslant 4 \tag{1.13}$$

$$g'\text{admet un minimum global en } y_0 \text{ et on a : } \left\{\begin{aligned} &g^{(1)}(y_0) < 0 \\ &g^{(2)}(y_0) = 0 \\ &g^{(3)}(y_0) > 0 \end{aligned}\right. \tag{1.14}$$

On aurait pu simplement supposer que y_0 était un minimum local mais on s'interesse surtout à ce qu'il se passe dans un voisinage du point de naissance du choc. Il suffirait alors de choisir ce voisinage pour que la singularité qui y apparaisse soit celle provenant de y_0. Pour simplifier, on supposera donc ce minimum global.

On sait alors que la solution faible entropique de (1.12) est régulière jusqu'à un certain temps t_0 et qu'elle présente un choc en (t_0, x_0) le long d'une demi-courbe $\{\, x = \varphi(t)\,;\, t \geqslant t_0 \,\}$ où t_0 et x_0 sont donnés par :

$$\left\{\begin{aligned} &t_0 = -\frac{1}{g'(y_0)} \\ &x_0 = y_0 + t_0 g(y_0) \\ &\alpha = g(y_0) \end{aligned}\right. \tag{1.15}$$

Sous les hypothèses (1.13) et (1.14) et si u_0 a une variation totale petite, le système (1.10)(1.11) admet une solution faible ([6],[14]) et on va montrer qu'elle vérifie le théorème suivant :

Théorème 1. *La solution faible entropique du système (1.10)(1.11), définie sur la réunion de* $\Omega_{t_0} = \{(t,x)\,;\, t \in [0,t_0]\}$ *et d'un voisinage du point* (t_0,x_0) *dans* $[t_0,+\infty[\times \mathbb{R}$ *présente un choc au point* (t_0,x_0) *le long de la courbe* $x=\varphi(t)$*. La courbe de choc* $x=\varphi(t)$ *est de classe* C^1 *et les fonctions* z *et* w *sont continues à droite et à gauche de celle-ci. On a de plus les estimations suivantes :*

$$\begin{cases} \varphi(t) = x_0 + \alpha(t-t_0) + O\big((t-t_0)^2\big) \\ w(t,x) = O\big((t-t_0)^{\frac{3}{2}}\big) \\ z(t,x) = z_0(y_0) + O\big(((t-t_0)^3 + (x-x_0)^2)^{\frac{1}{6}}\big) \end{cases}$$

Remarque. Au passage de la caractéristique $x=\Gamma(t)$ de w passant par (t_0,x_0), notée Γ sur la figure (1.1), la fonction w présente un saut qui est de l'ordre de $(\Gamma(t)-x)^{\frac{3}{2}}$ et elle ne peut donc pas être de classe C^2 au voisinage de cette courbe. On voit également que w n'est plus constant à droite de la courbe de choc.

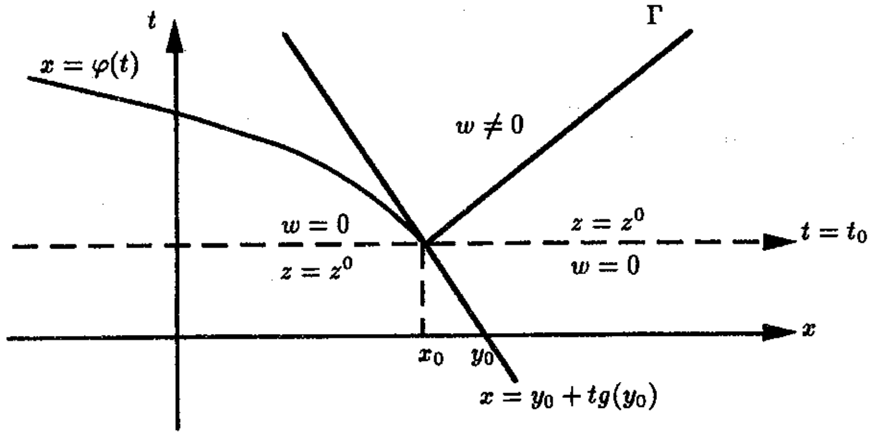

FIG. 1.1

La solution du p-système construite vérifie les conditions de Lax [11], i.e qu'on a un 1-choc admissible ; or les valeurs propres sont vraiment non linéaires et le p-système admet une entropie strictement convexe ([14]) ; il s'agit donc d'une solution faible entropique ; elle vérifie les conditions (vraiment non linéaire, p-système, nombre fini de choc ...) du théorème d'Oleinik [22], elle est donc unique. La solution n'étant pas lipschitzienne par morceaux au voisinage de (t_0,x_0), elle ne vérifie pas les conditions du théorème d'unicité de DiPerna ([4], [15]).

Pour démontrer le théorème 1, on va d'abord décrire la solution faible entropique de la loi de conservation scalaire. On sait que $\partial_x u$ a une singularité de l'ordre de $1/(t-t_0)$ au voisinage du choc ([24]) mais nous avons besoin d'en connaître davantage pour l'étude du p-système. De plus si on connaît cette solution, on peut entierement décrire la solution du p-système avant l'instant t_0 ; c'est dans ce but qu'on a choisi de travailler avec une onde simple.

Les paragraphes 2, 3 et 4 sont consacrés à la démonstration du théorème suivant. On considère le problème :

$$(1.16) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \ \text{ sur } [0,+\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

où f et u_0 sont à valeurs réelles. On pose :

$$(1.17) \qquad g = f'(u_0)$$

et on suppose que la fonction g vérifie les hypothèses (1.13) et (1.14). On sait que le problème (1.16) admet une unique solution faible entropique présentant un choc au point (t_0, x_0) le long de la courbe $x = \varphi(t)$ et on a de plus :

Théorème 2.

(1) *La courbe de choc $x = \varphi(t)$ est de classe C^p sur $]t_0, t_0 + \varepsilon[$ et $C^{\frac{3}{2}}$ sur $[t_0, t_0 + \varepsilon[$.*

(2) *Sur un voisinage de (t_0, x_0) dans $\{(t,x)\,;\, t \geqslant t_0$ et $x \neq \varphi(t)\}$, u est de classe C^p et il existe $C_0 > 0$ telle que :*

$$|u(t,x) - u(t_0,x_0)| \leqslant C_0\left((t-t_0)^3 + (x-x_0)^2\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$|\partial_t u(t,x)| \leqslant \frac{C_0}{\left((t-t_0)^3 + (x-x_0)^2\right)^{\frac{1}{6}}} \quad si \quad x \neq x_0, t \neq t_0$$

$$|\partial_x u(t,x)| \leqslant \frac{C_0}{\left((t-t_0)^3 + (x-x_0)^2\right)^{\frac{1}{3}}} \quad si \quad x \neq x_0, t \neq t_0$$

Remarque. L'unicité d'une solution faible entropique dans le cas scalaire a été démontrée par S.N Kruzkov [10].

On remarque alors qu'une solution de (1.11)(1.12) est ($w^0 = 0, z^0$ solution d'une équation scalaire) mais cette solution ne vérifie pas les équations de Rankine-Hugoniot du p-système (§5). C'est cependant une bonne approximation d'une solution faible du p-système. On construit alors un schéma itératif (§6), que l'on initialise avec les fonctions w^0 et z^0 définies précédemment (§7). En résolvant les équations linéaires obtenues (§9, §10), on construit une suite (z^ν, w^ν), qui nous donne, par passage à la limite (§12), une solution du p-système présentant un choc et on donne également des estimations de cette solution, de ses dérivées partielles (§11) et de la courbe de choc.

LA LOI DE CONSERVATION SCALAIRE

2. Description formelle de la solution.

On considère la loi de conservation scalaire suivante :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \ \text{ sur } [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

On définit la fonction g supposée bornée et de classe C^p sur $\mathbb{R}$ avec $p \geqslant 4$ par :

$$(2.2) \qquad g = f'(u_0).$$

On suppose que g vérifie les hypothèses (1.13) et (1.14). Le problème (2.1) admet alors une solution régulière définie sur $[0, t_0[\times\mathbb{R}$, avec t_0 défini en (1.15), par :

$$(2.3) \qquad u(t,x) = u_0\big(y(t,x)\big)$$

où $y(t,x)$ est l'unique solution de $x = y(t,x) + tg\big(y(t,x)\big)$. Ce résultat s'obtient en utilisant la méthode des caractéristiques ([11],[24] ...) et le théorème des fonctions implicites.

La fonction g étant bornée sur $\mathbb{R}$, le problème est local : le comportement de u au voisinage de (t_0, x_0) ne dépend que des valeurs de u_0 au voisinage de y_0. On peut donc supposer que :

$$(2.4) \qquad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{y_0\} \qquad (y - y_0) g^{(2)}(y) > 0.$$

Il suffit de modifier u_0 à l'extérieur d'un voisinage de y_0 pour obtenir ce résultat. On peut faire ce changement sans modifier le fait que $u_0 \in C^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et donc que g soit bornée.

On étudie d'abord le nombre de racines de l'équation des caractéristiques mises sous forme intégrale : $x = y + tg(y)$ pour t et x fixés avec $t \geqslant t_0$. L'hypothèse (2.4) et le fait que g soit bornée entraîne que g' est strictement décroissante de 0 à $-1/t_0$ (respectivement croissante de $-1/t_0$ à 0) lorsque y varie de $-\infty$ à y_0 (resp. de y_0 à $+\infty$). On en déduit que, pour $t > t_0$, l'équation :

$$1 + tg'(y) = 0 \tag{2.5}$$

admet deux racines distinctes $\eta_-(t)$ et $\eta_+(t)$ avec $\eta_-(t) < y_0 < \eta_+(t)$ où η_- et η_+ sont des fonctions monotones de classe C^{p-1} sur $]t_0, +\infty[$. On pose :

$$\begin{cases} x_-(t) = \eta_-(t) + tg(\eta_-(t)) \\ x_+(t) = \eta_+(t) + tg(\eta_+(t)) \end{cases} \tag{2.6}$$

On a alors le tableau de variations suivant pour la fonction $y \to y + tg(y)$.

y	$-\infty$ $\quad$ $\eta_-(t)$ $\quad$ y_0 $\quad$ $\eta_+(t)$ $\quad$ $+\infty$
$1+tg'(y)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$y+tg(y)$	$-\infty \nearrow x_-(t) \searrow x_0 \searrow x_+(t) \nearrow +\infty$

Il en résulte que l'équation $x = y + tg(y)$ admet :

(2.7)
pour $x \in]-\infty, x_+(t)[$, une seule solution notée $y_-(t,x)$
pour $x \in]x_+(t), x_-(t)[$, trois solutions notées
$y_-(t,x) < y_c(t,x) < y_+(t,x)$
pour $x \in]x_-(t), +\infty[$, une seule solution notée $y_+(t,x)$
pour $x = x_+(t)$, une solution simple et une solution double
$y_-(t,x) < y_c(t,x) = y_+(t,x) = \eta_+(t)$
pour $x = x_-(t)$, une solution simple et une solution double
$y_-(t,x) = y_c(t,x) = \eta_-(t) < y_+(t,x)$.

Remarque. Si on ne fait pas l'hypothèse (2.4), les résultats énoncés restent vrais sur un voisinage de (t_0, x_0).

Pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$, on note $y_+(t,x) = y_-(t,x) = y(t,x)$ l'unique solution de $x = y + tg(y)$, définie précédemment. On pose :

$$\Omega_+ = \Omega_{t_0} \cup \{(t,x) \in \Omega \; ; \; t \geqslant t_0 \; ; \; x > x_+(t)\}$$
$$\Omega_- = \Omega_{t_0} \cup \{(t,x) \in \Omega \; ; \; t \geqslant t_0 \; ; \; x < x_-(t)\}$$

La fonction y_+ (respectivement y_-) est de classe C^p sur Ω_+ (resp.Ω_-). Elle est de plus continue sur $\overline{\Omega}_+$ (resp. $\overline{\Omega}_-$). La régularité s'établit par le théorème des fonctions implicites. La fonction $u_+(t,x) = u_0(y_+(t,x))$ (resp. $u_-(t,x) = u_0(y_-(t,x))$) est solution de (2.1) sur Ω_+ (resp. Ω_-).

Nous allons ensuite montrer qu'il existe une fonction φ appartenant à $C^{\frac{p}{2}}([t_0, +\infty[) \cap C^p(]t_0, +\infty[)$ vérifiant :

$$x_+(t) < \varphi(t) < x_-(t) \quad \text{pour} \quad t > t_0 \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \dfrac{f(u_+(t,\varphi(t))) - f(u_-(t,\varphi(t)))}{u_+(t,\varphi(t)) - u_-(t,\varphi(t))} \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

On pose alors :

(2.10)
$$u(t,x) = \begin{cases} u_+(t,x) & \text{si} \quad x > \varphi(t) \quad \text{ou} \quad t \leqslant t_0 \\ u_-(t,x) & \text{si} \quad x < \varphi(t) \end{cases}$$

La solution u ainsi construite est solution forte de (2.1) à droite et à gauche de la courbe $x = \varphi(t)$. Elle vérifie de plus la condition de Rankine-Hugoniot (2.9), c'est donc une solution faible de (2.1).

D'autre part, la condition (2.4) implique que :

(2.11)
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad g'(y) = f''(u_0(y))u_0'(y) < 0.$$

Or, d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$u_+(t,x) - u_-(t,x) = u_0'(c)\big(y_+(t,x) - y_-(t,x)\big).$$

De (2.11), on en déduit que $[u]$ est positif si f est concave et négatif si f est convexe. La solution faible ainsi construite est entropique. Elle est donc unique d'après le théorème de S.N Kruzkov [10].

Remarque. Il résulte de cette unicité que l'équation différentielle (2.9) admet au plus une solution.

Dans le paragraphe suivant, on met en œuvre cette méthode et on donne des estimations des fonctions y_-, y_+ et φ. Pour simplifier les calculs, on suppose dans toute la suite que :

(2.12)
$$\begin{cases} y_0 = g(y_0) = g^{(2)}(y_0) = 0 \\ g'(y_0) = -1 \quad \text{et} \quad g^{(3)}(y_0) = 6 \\ yg^{(2)}(y) > 0 \qquad \forall y \neq 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne également :

(2.13)
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ t_0 = 1 \end{cases}$$

Il suffit de faire un changement affine des variables x et t pour obtenir ces hypothèses qui ne sont donc nullement restrictives.

3. La courbe de choc de la loi scalaire.

Ce paragraphe est consacré à la preuve de :

Proposition 3.1. *La fonction φ solution de l'équation de Rankine-Hugoniot appartient à $C^{\frac{5}{3}}([t_0, +\infty[) \cap C^p(]t_0, +\infty[)$.*

les deux premiers lemmes donnent des estimations des fonctions $\eta_\pm, x_\pm$ et $y_\pm$ introduites précédemment. Les lemmes 3.3 et 3.4 montrent l'existence d'une solution de l'équation de Rankine-Hugoniot. Les trois derniers lemmes prouvent la régularité annoncée. On pose :

(3.1)
$$\tau = t - t_0.$$

Lemme 3.1.

(1) *Les fonctions η_+ et η_- sont de classe C^{p-3} par rapport à la variable $\sqrt{\tau}$.*

(2) *Au voisinage de $\tau = 0$, on a :*

(3.2)
$$\begin{cases} \eta_+(t) \sim \sqrt{\dfrac{\tau}{3}} & \text{et} \quad \eta_-(t) \sim -\sqrt{\dfrac{\tau}{3}} \\ x_+(t) \sim -\dfrac{2}{9}\sqrt{3}\tau^{\frac{3}{2}} & \text{et} \quad x_-(t) \sim \dfrac{2}{9}\sqrt{3}\tau^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

(3)

(3.3) *$y_-(t,.)$ et $y_+(t,.)$ sont des fonctions croissantes.*

Preuve. Il suffit de le montrer pour η_+ et x_+. On sait déjà que η_+ est de classe C^{p-1} sur $]t_0, +\infty[$, on travaille donc au voisinage de $\tau = 0$. On remarque que $g'(\eta) - g'(0) = 1 - \frac{1}{t}$. On obtient donc en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\eta^2 \int_0^1 g^{(3)}(s\eta)(1-s)\,ds = 1 - \frac{1}{t}$$

car $g^{(2)}(0) = 0$. On pose :

$$h(\eta, \tau) = \eta\left(\int_0^1 g^{(3)}(s\eta)(1-s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{\tau}{\tau+1}}.$$

On obtient que $h(0,0) = 0$ et $\partial_\eta h(0,0) = \sqrt{3}$. Le théorème des fonctions implicites prouve alors la première partie. On obtient l'équivalent de η par identification. On a posé :

$$\begin{aligned} x_+(t) &= \eta_+(t) + tg\big(\eta_+(t)\big) \\ &= t\big(g(\eta_+(t)) - g'(\eta_+(t))\eta_+(t)\end{aligned}$$

or un développement limité au voisinage de 0 donne :

$$\begin{aligned} g(\eta_+(t)) - g'(\eta_+(t))\eta_+(t) &= -\frac{1}{3}g^{(3)}(0)(\eta_+(t))^3 + O(\tau^2) \\ &= -2(\eta_+(t))^3 + O(\tau^2).\end{aligned}$$

L'équivalent obtenu pour $\eta_+(t)$ permet alors de conclure. Enfin $y_-(t,.)$ et $y_+(t,.)$ sont les fonctions réciproques de fonctions croissantes. Elles sont donc également croissantes. □

On introduit la notation suivante :

$$(3.4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \tilde{y}_-(t,x) = \begin{cases} y_-(t, x_+(t)) & \text{si} \quad x \leqslant x_+(t) \\ y_-(t,x) & \text{si} \quad x_+(t) \leqslant x \leqslant x_-(t) \\ \eta_-(t) & \text{si} \quad x \geqslant x_-(t) \end{cases} \\ \tilde{y}_+(t,x) = \begin{cases} y_+(t, x_-(t)) & \text{si} \quad x \geqslant x_-(t) \\ y_+(t,x) & \text{si} \quad x_+(t) \leqslant x \leqslant x_-(t) \\ \eta_+(t) & \text{si} \quad x \leqslant x_+(t) \end{cases}\end{array}\right.$$

Dans l'étude de l'équation de Rankine-Hugoniot, on travaillera avec ces fonctions qui ont l'intérêt d'être continues sur $\overline{\Omega_+ \cup \Omega_-}$ et on verra que la solution de cette équation se situe dans $\Omega_+ \cap \Omega_-$ où l'on a $\tilde{y}_\pm = y_\pm$.

Lemme 3.2. *On a les estimations suivantes :*

(1)

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \tilde{y}_-(t,x) = O(\sqrt{\tau}) \\ \tilde{y}_+(t,x) = O(\sqrt{\tau}) \end{cases}$$

(2) *Il existe $C > 0$ tel que :*

$$x.\big(\tilde{y}_-(t,x) + \tilde{y}_+(t,x)\big) \geqslant -C\,\tau\,|x|.$$

Preuve. D'après le lemme 3.1, il suffit de la faire sur $\overline{\Omega_+ \cap \Omega_-}$.

1) $\tilde{y}_+$ est une fonction croissante de x, on a donc :

$$0 \leqslant \eta_+(t) \leqslant \tilde{y}_+(t,x) \leqslant y_+(t,x_-(t)).$$

Il suffit donc de montrer que si on pose $z = y_+(t,x_-(t))$, on a $z = O(\sqrt{\tau})$. Or z vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} z + tg(z) &= x_-(t) = \eta_-(t) + tg(\eta_-(t)) \\ 1 + tg'(\eta_-(t)) &= 0 \\ \text{d'où } g(z) - g(\eta_-(t)) &= (z - \eta_-(t))g'(\eta_-(t)). \end{aligned}$$

En écrivant la formule de Taylor avec reste intégrale de g en $\eta_-(t)$, on obtient alors :

$$g^{(2)}(\eta_-(t)) + (z - \eta_-(t)) \int_0^1 (1-\theta)^2 g^{(3)}(\eta_-(t) + \theta(z - \eta_-(t)))\, d\theta = 0$$

or $g^{(2)}(\eta_-(t)) = 6\eta_-(t) + O(\tau)$ d'après (3.2) et

$$\int_0^1 (1-\theta)^2 g^{(3)}(\eta_-(t) + \theta(z - \eta_-(t))\, d\theta \sim 2 \quad \text{en } t_0$$

$$\text{donc} \quad z - \eta_-(t) \sim 3\eta_-(t) \quad \text{pour } t \text{ voisin de } t_0.$$

On utilise alors (3.2) pour obtenir le résultat.

2) $\tilde{y}_+ + \tilde{y}_-$ étant croissant en x, il suffit de montrer que

$$\tilde{y}_+(t,0) + \tilde{y}_-(t,0) = O(\tau).$$

Posons $\xi_+(t) = \tilde{y}_+(t,0)$ et $\xi_-(t) = \tilde{y}_-(t,0)$. ξ_+ et ξ_- sont respectivement la racine strictement positive et strictement négative de :

$$\begin{aligned} 0 &= \xi + tg(\xi) \\ &= \xi\Big(\tau g'(0) + \frac{t}{2}\xi^2 \int_0^1 (1-\theta)^2 g^{(3)}(\theta\xi)\, d\theta\Big) \end{aligned}$$

D'où

$$\xi_\pm = \pm\sqrt{\frac{2\tau}{t\int_0^1 (1-\theta)^2 g^{(3)}(\theta\xi_\pm)\, d\theta}}.$$

On remarque que ξ_+ et ξ_- sont des fonctions C^{p-3} de $\sqrt{\tau}$. De plus : $\xi_\pm \sim \pm\sqrt{\tau}$. On obtient donc : $\xi_+(t) + \xi_-(t) = O(\tau)$. Le lemme 3.2 est donc prouvé □

On note $x = \varphi(t)$ l'équation de la courbe de choc. On obtient alors un choc admissible si la fonction φ vérifie l'équation de Rankine-Hugoniot suivante :

$$(3.6) \qquad \begin{cases} \varphi'(t) = \dfrac{f\big(u_0(y_+(t,\varphi(t)))\big) - f\big(u_0(y_-(t,\varphi(t)))\big)}{u_0\big(y_+(t,\varphi(t))\big) - u_0\big(y_-(t,\varphi(t))\big)} \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases}$$

On pose :

$$(3.7) \qquad a(x,y) = \frac{f\big(u_0(x)\big) - f\big(u_0(y)\big)}{u_0(x) - u_0(y)}.$$

Avant de résoudre l'équation (3.6), on montre le :

Lemme 3.3.
(1) *La fonction a est bornée et symétrique sur $\mathbb{R}^2$.*
(2) $a \in C^p(\mathbb{R}^2)$.
(3) $a(x,y) = -\frac{1}{2}(x+y) + b(x,y)$ *avec* $b(x,y) = O(x^2+y^2)$
(4) $a(.,y)$ *est une fonction strictement croissante.*

Preuve. Les deux premières parties du lemme sont évidentes d'après la régularité de f et u_0.

Posons $c(y,\theta) = a(y+\theta, y-\theta)$. Pour montrer le troisième point, il suffit de prouver que $c(y,\theta) = -y + O(y^2+\theta^2)$. $c(y,.)$ est une fonction paire donc $c(y,\theta) = c(y,0) + O(\theta^2)$ or on a : $c(y,0) = a(y,y) = g(y) = -y + O(y^2)$ d'où le résultat.

Le quatrième point est une conséquence de l'hypothèse (2.4). En effet, on peut également écrire $a(x,y)$ sous la forme suivante :

$$a(x,y) = \int_0^1 f'\big(u_0(x) + \theta(u_0(y) - u_0(x))\big)\, d\theta.$$

On obtient alors en dérivant par rapport à x :

$$\partial_x a(x,y) = \int_0^1 (1-\theta) u_0'(x) f^{(2)}\big(u_0(x) + \theta(u_0(y) - u_0(x))\big)\, d\theta$$

or u_0' et $f^{(2)}$ sont de signes opposés, donc $a(.,y)$ est une fonction strictement croissante □

On résout maintenant l'équation de Rankine-Hugoniot.

Lemme 3.4. *L'équation différentielle*

$$\begin{cases} \varphi'(t) = a\big(y_+(t,\varphi(t)), y_-(t,\varphi(t))\big) \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

admet une solution globale appartenant à $C^1([t_0,+\infty[) \cap C^p(]t_0,+\infty[$ *et on a :*

$$\begin{cases} x_+(t) < \varphi(t) < x_-(t) \quad \textit{pour} \quad t > t_0 \\ \varphi(t) = O(\tau^2) \end{cases} \tag{3.9}$$

Preuve. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = a\big(\tilde{y}_+(t,\varphi(t)), \tilde{y}_-(t,\varphi(t))\big) \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

La fonction $(t,x) \to a\big(\tilde{y}_+(t,x), \tilde{y}_-(t,\varphi)\big)$ est continue et bornée sur $[t_0,+\infty[\, \times \mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de Péano, l'équation (3.10) admet au moins une solution globale appartenant à $C^1([t_0,+\infty[)$. De plus on a :

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)^2) = 2\varphi(t)\varphi'(t) = 2\varphi(t)\, a\big(\tilde{y}_+(t,\varphi(t)), \tilde{y}_-(t,\varphi(t))\big).$$

En utilisant les lemmes 3.2 et 3.3, on en déduit que :

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)^2) = -\varphi(t)\big(\tilde{y}_+(t,\varphi(t)) + \tilde{y}_-(t,\varphi(t))\big) + O(\tau)\varphi(t)$$

et, d'après la deuxième partie du lemme 3.2, il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout $t \geqslant t_0$, on ait :

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)^2) \leqslant C\tau|\varphi|.$$

En intégrant, on obtient alors :

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{C}{4}\tau^2.$$

D'après le lemme 3.1, il existe donc t_1 vérifiant $t_0 < t_1 \leqslant +\infty$ tel que, pour tout $t \in]t_0, t_1[$, on ait :

$$x_+(t) < \varphi(t) < x_-(t).$$

Remarquons que l'on a, pour $t > t_0$, d'après le lemme 3.3 :

$$\begin{aligned} a\big(\tilde{y}_+(t, x_-(t)), \tilde{y}_-(t, x_-(t))\big) &= a\big(y_+(t, x_-(t)), \eta_-(t)\big) \\ &< a(\eta_-(t), \eta_-(t)) = g(\eta_-(t)) = x'_-(t). \end{aligned}$$

On montre de même que : $x'_+(t) < a\big(\tilde{y}_+(t, x_+(t)), \tilde{y}_-(t, x_-(t))\big)$. On déduit de ces deux inégalités que la courbe $(t, \varphi(t))$ ne peut pas couper les courbes $(t, x_-(t))$ et $(t, x_+(t))$, ce qui nous donne :

$$\forall t \in]t_0, +\infty[\qquad x_+(t) < \varphi(t) < x_-(t)$$

d'où $a\big(\tilde{y}_+(t, \varphi(t)), \tilde{y}_-(t, \varphi(t))\big) = a\big(y_+(t, \varphi(t)), y_-(t, \varphi(t))\big)$, et φ est donc solution globale de (3.8). a, y_- et y_+ étant des fonctions C^p sur leur domaine de définition, on a également la régularité de φ sur $]t_0, +\infty[$.

On va montrer que la solution φ de l'équation de Rankine-Hugoniot (3.8) a la régularité annoncée dans la proposition 3.1 sur $[t_0, +\infty[$.

On sait déjà, d'après le lemme 3.4, que φ est une fonction C^1 sur $[t_0, +\infty[$. Dans les deux premiers lemmes, on étudie la régularité de la fonction φ par rapport à la variable $\sqrt{\tau}$ puis on montre le résultat en étudiant son développement limité.

On pose :

$$s = \sqrt{\tau} \qquad \lambda = \frac{x}{s^3} \qquad \mu = \frac{y}{s} \tag{3.11}$$

On commence par étudier la régularité des fonctions y_+ et y_-.

Lemme 3.5. *Les fonctions* $(s, \lambda) \to s^\alpha y_+(t, x)$ *et* $(s, \lambda) \to s^\alpha y_-(t, x)$ *sont de classe* $C^{p-2+\alpha}$ *pour* $\alpha = -1, 0, 1, 2$. *De plus, on a :*

$$\begin{cases} y_+(t, x) = s\big(\ 1 + \dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{g^{(4)}(0)}{48}s\big) + O(s^3 + s\lambda^2) \\ y_-(t, x) = s\big(-1 + \dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{g^{(4)}(0)}{48}s\big) + O(s^3 + s\lambda^2) \end{cases} \tag{3.12}$$

Preuve. $y_+(t, x)$ et $y_-(t, x)$ sont respectivement la plus grande et la plus petite racine de :

$$y + tg(y) = x. \tag{3.13}$$

On définit la fonction h appartenant à $C^{p-3}(\mathbb{R})$ nulle en 0 par :

$$h(y) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2} g^{(3)}(\theta y)\, d\theta - 1.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale permet d'écrire l'équation (3.13) sous la forme suivante en utilisant les notations (3.11) :

$$F(s, \lambda, \mu) \overset{\text{déf}}{=} (1 + s^2)\mu^3 - \mu + (1 + s^2)\mu^3 h(s\mu) - \lambda = 0 \tag{3.14}$$

Le changement de variables (3.11) permet de séparer les solutions de l'équation (3.13) et donc d'utiliser le théorème des fonctions implicites. En effet, si l'on prend $(s, \lambda) = (0, 0)$, ce qui correspond à $(t, x) = (1, 0)$, l'équation (3.14) admet trois racines distinctes :

$$\mu_+ = 1 \qquad \mu_- = -1 \qquad \mu_c = 0$$

De plus, on a $\partial_\mu F(0, 0, \mu_\pm) = 2$. Le théorème des fonctions implicites nous dit alors que μ_+ et μ_- sont des fonctions de classe C^{p-3} sur un voisinage de (0, 0) des variables s et λ ; on a donc montré le lemme pour $\alpha = -1$.

Cherchons maintenant un développement limité de $\mu_\pm$ par identification. Faisons-le pour μ_+. On a supposé $p \geqslant 4$, on peut donc poser : $\mu_+(\sqrt{\tau}, \lambda) = 1 + a\sqrt{\tau} + b\lambda + O(s^2 + \lambda^2)$. On introduit cette expression dans l'équation (3.14) et, après calcul, on trouve :

$$a = \frac{1}{48} g^{(4)}(0) \qquad b = \frac{1}{2} \quad \square$$

On note $\mu(s, \lambda)$ l'une des deux solutions $\mu_+(s, \lambda)$ ou $\mu_-(s, \lambda)$. μ vérifie :

$$F(s, \lambda, \mu(s, \lambda)) = 0. \tag{3.15}$$

On appelle μ' l'une des dérivées partielles de μ. On a l'identité suivante :

$$(s\mu)' = s\mu' + \mu. \tag{3.16}$$

Il suffit donc de montrer que $s\mu'$ est de classe C^{p-3} pour avoir le résultat du lemme avec $\alpha = 0$. Faisons-le par exemple pour $s\frac{\partial \mu}{\partial s}$. On dérive l'équation (3.15) par rapport à s et on obtient :

$$\begin{cases} F_1(s, \lambda, \mu(s, \lambda))\mu' + F_2(s, \lambda, \mu(s, \lambda)) = 0 \\ F_1(s, \lambda, \mu(s, \lambda)) = (3\mu^2(1 + h(s\mu) + \mu^3 s h'(s\mu))(1 + s^2) - 1 \\ F_2(s, \lambda, \mu(s, \lambda)) = 2s\mu^3(1 + h(s\mu)) + (1 + s^2)\mu^4 h'(s\mu) \end{cases} \tag{3.17}$$

or la fonction $y \to yh'(y)$ est de classe C^{p-3} donc les fonctions F_1 et sF_2 le sont également. De plus, on a $F_1(0, 0, \pm 1) = 1$ et μ est de classe C^{p-3} d'après ce qu'on vient de montrer $s\mu'$ est alors une fonction de classe C^{p-3} sur un voisinage de l'origine.

En utilisant une identité comparable à celle écrite en (3.16), on voit qu'il suffit de montrer que $s^2\mu''$ et $s^3\mu^{(3)}$ sont respectivement de classe C^{p-3} et C^{p-2} pour obtenir la régularité de $s^2\mu$ et $s^3\mu$ où le prime représente une dérivée par rapport à λ ou s. On dérive l'équation (3.17) multipliée par s pour pouvoir utiliser que la fonction $y \to yh'(y)$ est de classe C^{p-3}, on multiplie l'équation obtenue par s et on montre alors que $s^2\mu''$ est de classe C^{p-3}. On recommence le même processus pour obtenir la régularité de $s^3\mu^{(3)}$.

Lemme 3.6.

(1) *La fonction $s \to \varphi'(t)$ est de classe C^{p-2} sur $[0, +\infty[$.*
(2) *La fonction φ est de classe C^2 sur $[t_0, +\infty[$.*

Preuve. On définit la fonction λ par :

$$\lambda(s) = \frac{\varphi(t)}{\tau^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varphi(1 + s^2)}{s^3}. \tag{3.18}$$

D'après le lemme 3.4, on a l'estimation :

$$\lambda(s) = O(s). \tag{3.19}$$

Pour s strictement positif, la fonction λ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} s\lambda'(s) + 3\lambda(s) &= \frac{2}{s}a\Big(y_+(1+s^2, s^3\lambda(s)), y_-(1+s^2, s^3\lambda(s))\Big) \\ &= -\Big(\mu_+(s,\lambda) + \mu_-(s,\lambda)\Big) + \frac{2}{s}b(s\mu_+, s\mu_-) \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.3.

On définit la fonction d par :

$$d(s,\lambda) = -\frac{\mu_+(s,\lambda) + \mu_-(s,\lambda) - \lambda}{s} + \frac{2}{s^2}b(s\mu_+, s\mu_-). \tag{3.20}$$

On déduit des lemmes 3.3 et 3.6 que la fonction $(s,\lambda) \to s^\alpha d(s,\lambda)$ est de classe $C^{p-4+\alpha}$ pour $\alpha = 0,1,2$. λ vérifie alors une équation différentielle de type Fuchs :

$$\begin{cases} s\lambda'(s) + 4\lambda(s) = sd(s,\lambda(s)) \\ \lambda(0) = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

c'est alors une fonction de classe C^{p-3} d'après le théorème de Fuchs ([5]). On a vu que la fonction sd est de classe C^{p-3} donc, d'après l'équation (3.21), $s\lambda'$ aussi. L'identité (3.16) implique que $s\lambda$ est de classe C^{p-2}. En multipliant l'équation (3.21) par s, on en déduit que la fonction $s \to s^\alpha\lambda(s)$ est de classe $C^{p-3+\alpha}$ pour $\alpha = 0,1,2$. On a alors montré le premier point du lemme.

On pose :

$$\rho(s) = \varphi'(t). \tag{3.22}$$

On vient de montrer que ρ est de classe C^{p-2} sur $[0,+\infty[$. De plus, d'après (3.8), on a $\rho(0) = \rho'(0) = 0$, donc :

$$\varphi^{(2)}(t) = \frac{1}{2s}\rho'(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho^{(2)}(s\theta)\,d\theta.$$

On a supposé $p \geqslant 4$ donc la fonction $\rho^{(2)}$ est au moins continue et on peut alors prolonger continûment $\varphi^{(2)}$ en $t = 1$. La fonction φ est donc de classe C^2 sur $[1,+\infty[$ $\square$

Les fonctions $t \to \varphi'(t), t \to y_+(t,\varphi(t))$ et $t \to y_-(t,\varphi(t))$ admettent donc des développements limités d'ordre $p-2$ par rapport à la variable s. On va maintenant montrer que les termes d'ordre impair sont nuls. On pose :

$$\begin{cases} \sigma(s) = \dfrac{y_+(t,\varphi(t)) + y_-(t,\varphi(t))}{2} \\ \delta(s) = \dfrac{y_+(t,\varphi(t)) - y_-(t,\varphi(t))}{2s} \end{cases} \tag{3.23}$$

On a vu que la fonction ρ définie en (3.22) et la fonction σ sont de classe C^{p-2} sur $[0,+\infty[$ tandis que la fonction δ est de classe C^{p-3}. En utilisant les lemmes 3.4 et 3.5, on peut alors écrire :

$$\begin{cases} \rho(s) = \sum\limits_{k=2}^{p-2} \rho_k s^k + o(s^{p-2}) \\ \sigma(s) = \sum\limits_{k=2}^{p-2} \sigma_k s^k + o(s^{p-2}) \\ \delta(s) = 1 + \sum\limits_{k=2}^{p-3} \delta_k s^k + o(s^{p-3}) \end{cases} \tag{3.24}$$

De plus, $y_+(t, \varphi(t))$ et $y_-(t, \varphi(t))$ sont solutions de l'équation :

$$y + tg(y) = \varphi(t).$$

En additionnant et en retranchant les deux équations obtenues et en utilisant le changement de variables (3.13), on obtient que les fonctions δ et σ vérifient le système :

$$\begin{cases} \sigma(s) + (1+s^2)\dfrac{g\big(\sigma(s)+s\delta(s)\big)+g\big(\sigma(s)-s\delta(s)\big)}{2} = \varphi(1+s^2) \\ 1+(1+s^2)\dfrac{g\big(\sigma(s)+s\delta(s)\big)-g\big(\sigma(s)-s\delta(s)\big)}{2s\delta(s)} = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

L'équation de Rankine-Hugoniot s'écrit alors avec ces nouvelles variables :

$$\rho(s) = a\Big(\sigma(s)+s\delta(s), \sigma(s)-s\delta(s)\Big) \tag{3.26}$$

Ces trois relations vont nous permettre de démontrer le lemme suivant par récurrence :

Lemme 3.7. *Les coefficients ρ_k, σ_k et δ_k, intervenant dans (3.24), sont nuls si k est impair.*

Preuve. La forme (3.24) montre déjà que $\sigma_1 = \delta_1 = \rho_1 = 0$. On va alors procéder par récurrence. On suppose donc que l'hypothèse de récurrence suivante est vérifiée :

$$(P_l) \qquad \rho_{2j-1} = \sigma_{2j-1} = \delta_{2j-1} = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant l-1.$$

Si $p \leqslant 2l$, le lemme est démontré ; on suppose donc $p \geqslant 2l+1$. Le système (3.24) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho(s) = p(s^2) + \rho_{2l-1}s^{2l-1} + o(s^{2l-1}) \\ \sigma(s) = s^2q(s^2) + \sigma_{2l-1}s^{2l-1} + o(s^{2l-1}) \\ \delta(s) = 1 + s^2r(s^2) + o(s^{2l-2}) \end{cases} \tag{3.27}$$

où p, q et r sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Nous allons montrer que les coefficients ρ_{2l-1} et σ_{2l-1} sont nuls. On utilise d'abord l'équation (3.26). D'après le lemme 3.3, on a :

$$\begin{aligned} \rho(s) &= a\Big(\sigma(s)+s\delta(s), \sigma(s)-s\delta(s)\Big) \\ &= -\sigma(s) + b\Big(\sigma(s)+s\delta(s), \sigma(s)-s\delta(s)\Big) \\ &= -\sigma(s) + P(\sigma(s), s\delta(s)) + o(s^{2l-1}) \end{aligned}$$

où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X_1, X_2]$ de valuation deux et ne contenant que des termes de degré pair en X_2. On identifie alors les termes de degré $2l-1$ et on trouve :

$$\rho_{2l-1} = -\sigma_{2l-1}. \tag{3.28}$$

Par définition de ρ, on a également :

$$\varphi(1+s^2) = \pi(s^2) + 2\,\frac{\rho_{2l-1}}{2l+1}\,s^{2l+1} + o(s^{2l+1}) \tag{3.29}$$

où π est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de valuation deux d'après le lemme 3.4. D'autre part, on a supposé que g est une fonction de classe C^p sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = g^{(2)}(0) = 0, g'(0) = -1$ et $g^{(3)}(0) = 6$. Il existe donc un polynôme R de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} g(\sigma+s\delta) = -(\sigma+s\delta) + (\sigma+s\delta)^3 + (\sigma+s\delta)^4R(\sigma+s\delta) + o(s^p) \\ g(\sigma-s\delta) = -(\sigma-s\delta) + (\sigma-s\delta)^3 + (\sigma-s\delta)^4R(\sigma-s\delta) + o(s^p) \end{cases} \tag{3.30}$$

On pose :

$$
(3.31) \qquad \begin{cases} Q(\sigma, s\delta) = \dfrac{(\sigma + s\delta)^4 R(\sigma + s\delta) - (\sigma - s\delta)^4 R(\sigma - s\delta)}{2s\delta} \\ T(\sigma, s\delta) = \dfrac{(\sigma + s\delta)^4 R(\sigma + s\delta) + (\sigma - s\delta)^4 R(\sigma - s\delta)}{2} \end{cases}
$$

Q et T sont des polynômes de $\mathbb{R}[X_1, X_2]$ de valuation respectivement trois et quatre et n'ayant que des termes de degré pair en X_2. La première équation du système (3.25) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$
(3.32) \qquad \begin{aligned} &(1+s^2)\big(\sigma(s)^3 + 3s^2\sigma(s)\delta(s)^2 + T(\sigma(s), s\delta(s))\big) = \\ &\quad s^2\sigma(s) + \varphi(1+s^2) + o(s^p) \end{aligned}
$$

On identifie les termes de degré $2l+1$ avec l'aide de l'égalité (3.29) et on trouve :

$$
(3.33) \qquad 3\sigma_{2l-1} = 2\,\frac{\rho_{2l-1}}{2l+1}.
$$

Les égalités (3.28) et (3.33) montrent alors que $\sigma_{2l-1} = \rho_{2l-1} = 0$.

Pour achever la démonstration, il faut montrer que, si $p \geqslant 2l+2$, on a $\delta_{2l-1} = 0$. Le système (3.24) s'écrit maintenant :

$$
(3.34) \qquad \begin{cases} \rho(s) = p(s^2) + o(s^{2l}) \\ \sigma(s) = s^2 q(s^2) + o(s^{2l}) \\ \delta(s) = 1 + s^2 r(s^2) + \delta_{2l-1}s^{2l-1} + o(s^{2l-1}) \end{cases}
$$

On utilise alors la deuxième équation du système (3.25). On l'écrit à l'aide du polynôme Q défini en (3.31) et on obtient :

$$
(3.35) \qquad (1+s^2)(3\sigma(s)^2 + s^2\delta(s)^2) = s^2 - (1+s^2)Q\big(\sigma(s), s\delta(s)\big) + o(s^{2l-1}).
$$

On égale alors les termes de degré $2l+1$ et on trouve que le coefficient δ_{2l-1} est nul $\square$

Le lemme suivant démontré par H. Whitney [25] va nous permettre de prouver la proposition 3.1 :

Lemme 3.8. *Soit $f \in C^k(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction paire, alors il existe une fonction g de classe $C^{\frac{k}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = g(x^2)$.*

On définit la fonction $\tilde{\rho}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$
\begin{aligned} \tilde{\rho}(s) &= \rho(s) \quad \text{si} \quad s \geqslant 0 \\ &= \rho(-s) \quad \text{si} \quad s \leqslant 0 \end{aligned}
$$

La fonction $\tilde{\rho}$ est une fonction de classe C^{p-2} sur $\mathbb{R}$ d'après le lemme 3.7 ; elle est paire par construction. Il existe donc une fonction g de classe $C^{\frac{p}{2}-1}$ telle que :

$$
\tilde{\rho}(s) = g(s^2).
$$

La fonction φ' est donc de classe $C^{\frac{p}{2}-1}$ sur $[t_0, +\infty[$ et on a montré la proposition 3.1 $\square$

On prouve de la même manière que les fonctions $t \to \sigma(s)$ et $t \to \delta(s)$ sont respectivement de classe $C^{\frac{p}{2}-1}$ et $C^{\frac{p}{2}-\frac{3}{2}}$.

Remarque. La régularité de φ en t_0, obtenue dans la proposition 3.1, est optimale.

En effet, considérons le cas de l'équation de Burgers avec comme condition initiale $u_0(x) = -x + x^3 + |x|^{4+\varepsilon}$ et $\varepsilon > 0$. L'équation de Rankine-Hugoniot est donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{1}{2}\Big(u_0\big(y_+(t,\varphi(t))\big) + u_0\big(y_-(t,\varphi(t))\big)\Big)\\ &= \frac{\varphi(t)}{t} - \frac{y_+(t,\varphi(t)) + y_-(t,\varphi(t))}{2t}\end{aligned}$$

car $y_+(t,\varphi(t))$ et $y_-(t,\varphi(t))$ sont solutions de $\varphi(t) = y + tu_0(y)$.

On a $u_0 \in C^{4+\varepsilon}(\mathbb{R})$. On fait un développement limité de $y_+(t,\varphi(t))$ et $y_-(t,\varphi(t))$ comme précédemment et on obtient après calcul :

$$\begin{cases} y_+(t,\varphi(t)) = \sqrt{t-t_0}\,\Big(1 + \dfrac{\varphi(t)}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{2}(t-t_0)^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\Big) + o\big((t-t_0)^{\frac{3}{2}}\big)\\ y_-(t,\varphi(t)) = -\sqrt{t-t_0}\,\Big(1 - \dfrac{\varphi(t)}{2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{2}(t-t_0)^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\Big) + o\big((t-t_0)^{\frac{3}{2}}\big)\end{cases}$$

On applique ce développement à l'équation de Rankine-Hugoniot, ce qui donne :

$$\varphi'(t) - \frac{2-t}{t-t_0}\,\varphi(t) = \frac{1}{2t}(t-t_0)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} + o\big((t-t_0)^{\frac{3}{2}}\big)$$

or, si la fonction φ est de classe C^k, le premier membre est de classe C^{k-1} donc on a nécessairement :

$$k \leqslant 2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

et la solution φ de cette équation de Rankine-Hugoniot est exactement de classe $C^{\frac{p}{2}}$.

Pour finir la preuve du théorème 1, il nous reste à donner les estimations de la fonction u au voisinage du choc.

4. Régularité de la solution de la loi scalaire.

On pose :

$$\begin{aligned}\Omega_+^{\varphi} &= \{(t,x); t \leqslant t_0 \text{ ou } x > \varphi(t)\}\\ \Omega_-^{\varphi} &= \{(t,x); t \leqslant t_0 \text{ ou } x < \varphi(t)\}\end{aligned}$$

et on veut montrer :

Proposition 4.1. *Sur un voisinage de (t_0,x_0) dans $\Omega_+^{\varphi} \cap \{(t,x)\,;\, t \geqslant t_0\}$, il existe une constante C_0 telle que la fonction u vérifie les estimations suivantes sur $\overline{\Omega_+^{\varphi}}$:*

$$\begin{aligned}|\,u(t,x) - u(t_0,x_0)\,| &\leqslant C_0\,\big((t-t_0)^3 + (x-x_0)^2)\big)^{\frac{1}{6}}\\ |\,\partial_t u(t,x)\,| &\leqslant \frac{C_0}{\big((t-t_0)^3 + (x-x_0)^2)\big)^{\frac{1}{6}}} \quad \textit{si} \quad x \neq x_0, t \neq t_0\\ |\,\partial_x u(t,x)\,| &\leqslant \frac{C_0}{\big((t-t_0)^3 + (x-x_0)^2)\big)^{\frac{1}{3}}} \quad \textit{si} \quad x \neq x_0, t \neq t_0\\ |\,\partial_{x^2}^2 u(t,x)\,| &\leqslant \frac{C_0}{\big((t-t_0)^3 + (x-x_0)^2)\big)^{\frac{5}{6}}} \quad \textit{si} \quad x \neq x_0, t \neq t_0\end{aligned}$$

On a défini la solution u de l'équation (2.1) par :

$$u(t,x) = \begin{cases} u_+(t,x) = u_0(y_+(t,x)) & \text{si} \quad (t,x) \in \Omega_+^{\varphi}\\ u_-(t,x) = u_0(y_-(t,x)) & \text{si} \quad (t,x) \in \Omega_-^{\varphi}\end{cases} \tag{4.1}$$

Lemme 4.1.

(1) *La fonction u est de classe C^p sur $\Omega \setminus \{(t,x)\,;\, x = \varphi(t)\}$.*

(2) *La fonction $t \to s\,[u]$ est de classe $C^{\frac{p}{2}-1}$ sur $[t_0, +\infty[$.*

Preuve. Le premier point a déjà été prouvé dans le paragraphe 2.
On a :

$$\begin{cases} u_+(t,\varphi(t)) = u_0(y_+(t,\varphi(t))) \\ u_-(t,\varphi(t)) = u_0(y_-(t,\varphi(t))) \end{cases} \tag{4.2}$$

On en déduit avec la notation (3.23) que :

$$s\,[u] = s\,(u_0(\sigma(s) + s\delta(s)) - u_0(\sigma(s) - s\delta(s))).$$

La fonction $s \to s\,[u]$ est donc paire et de classe C^{p-2} ; le lemme 3.8 donne alors le résultat □

Preuve de la proposition. On a vu qu'on pouvait se ramener au cas $t_0 = 1$ et $x_0 = 0$. La fonction u_0 est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, donc, d'après (4.1), il suffit de montrer les estimations données dans la proposition 4.1 sur la fonction y_+. On va d'abord montrer les inégalités suivantes sur $\Omega_+^\varphi \cap \{(t,x)\,;\, t \geqslant t_0\}$:

$$\frac{2}{3}(\tau^3 + x^2)^{\frac{1}{6}} \leqslant y_+(t,x) \leqslant \frac{3}{2}(\tau^3 + x^2)^{\frac{1}{6}} \tag{4.3}$$

avec $\tau = t - t_0$. Ces inégalités nous donnent la première estimation du lemme. $y_+(t,x)$ est la plus grande solution de l'équation :

$$x = y + tg(y) \tag{4.4}$$

On pose alors :

$$\begin{cases} \upsilon = (\tau^3 + x^2)^{\frac{1}{6}} & \\ T = \dfrac{\tau}{\upsilon^2} & X = \dfrac{x}{\upsilon^3} \\ Y = \dfrac{y}{\upsilon} & Y_+ = \dfrac{y_+(t,x)}{\upsilon} \end{cases} \tag{4.5}$$

On remarque que T et X sont dans l'intervalle $[0,1]$ pour $(t,x) \in \Omega_+^\varphi$ et T et X tendent vers 1 si l'on fait tendre (t,x) vers $(t_0, 0)$ en restant dans Ω_+^φ d'après le lemme 3.4. Le lemme 3.5 montre également que Y_+ tend, dans ce cas, vers 1.

D'après les hypothèses (2.12) faites sur la fonction g, il existe une fonction h de classe C^{p-3} sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = -x + x^3 h(x)$ avec $h(0) = 1$ et on définit une fonction F par :

$$F(\tau,T,X,Y) = X + TY - (1+\tau)Y^3 h(\upsilon Y). \tag{4.6}$$

L'équation (4.4) nous donne $F(0,1,1,1) = 0$. De plus, on a également $\partial_Y F(0,1,1,1) = -2$ donc, d'après le théorème des fonctions implicites, Y_+ est une fonction C^{p-3} des variables τ, T et X.

On a, en particulier, $Y_+ = 1 + O(\tau + |T-1| + |X-1|)$ et, pour $\tau, |T-1|$ et $|X-1|$ assez petits :

$$\frac{2}{3} \leqslant Y_+ \leqslant \frac{3}{2}.$$

On va maintenant estimer $\partial_x y_+(t,x)$ pour $(t,x) \neq (t_0,x_0)$. D'après l'égalité (4.4), on a :

$$\partial_x y_+(t,x) = \frac{1}{1 + tg'(y_+(t,x))}. \tag{4.7}$$

On a vu, dans le paragraphe 2, que $1+tg'(y_+(t,x))>0$; il suffit donc de minorer ce terme pour obtenir le résultat. En utilisant les hypothèses faites sur la fonction g et l'estimation (4.3), on obtient :

$$\begin{aligned} 1+tg'(y_+(t,x)) &= 1+t(-1+3y_+^2(t,x)) + O((\tau^3+x^2)^{\frac{1}{2}}) \\ &= 3y_+^2(t,x)-\tau+O((\tau^3+x^2)^{\frac{1}{2}}) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(3y_+^2(t,x)-\tau\right) \text{ pour } \tau \text{ et } x \text{ assez petits.} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Or on a, pour τ et x assez petits :

$$3y_+^2(t,x)-\tau \geqslant \frac{4}{3}(\tau^3+x^2)^{\frac{1}{3}}-\tau \geqslant c(\tau^3+x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

D'après l'égalité (4.4), on a également :

$$\begin{aligned} \partial_t y_+(t,x) &= -\frac{g(y_+(t,x))}{1+tg'(y_+(t,x))} \\ \text{or } g(y_+(t,x)) &\sim -y_+(t,x) \text{ d'après (2.12)} \\ &\sim -\sqrt{\tau} \text{ d'après (3.12)} \end{aligned}$$

Cet équivalent et l'inégalité (4.8) donnent alors la deuxième estimation. On obtient la dernière estimation en dérivant (4.7) par rapport à x et en utilisant l'inégalité (4.8) □

LE P-SYSTEME

Nous passons maintenant à l'étude du p-système. on rappelle qu'on a choisi de travailler avec une onde simple car on sait alors décrire la solution régulière du p-système, tant qu'elle existe. On va d'abord écrire les équations de Rankine-Hugoniot au moyen des invariants de Riemann.

5. Les équations de Rankine-Hugoniot.

On veut construire une solution faible présentant un choc, les équations de Rankine-Hugoniot doivent donc être vérifiées. On les obtient à partir du système (1.4) car il est sous forme conservative. On note σ la pente du choc et on doit alors avoir :

$$\begin{cases} \sigma\,[u] = -\,[v] \\ \sigma\,[v] = [p(u)] \end{cases} \tag{5.1}$$

où les crochets représentent le saut de la fonction au passage de la courbe de choc. On va commencer par écrire ces équations au moyen des invariants de Riemann. D'après (1.7) et (1.8), on a :

$$\begin{cases} u = G(z-w) \qquad v = z+w \\ p(u) = -H(z-w) \end{cases}$$

Le système (5.1) devient alors :

$$\begin{cases} \sigma\,[G(z-w)] = -\,[z+w] \\ \sigma\,[z+w] = -\,[H(z-w)] \end{cases} \tag{5.2}$$

On les utilisera plutôt sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma = -\sqrt{\dfrac{[H(z-w)]}{[G(z-w)]}} & (RH_1) \\ [z+w]^2 = [G(z-w)]\,[H(z-w)] & (RH_2) \end{cases} \tag{5.3}$$

Remarque. Les deux systèmes précédents ne sont pas équivalents mais on a choisi de construire un 1-choc admissible donc les conditions de Lax doivent être vérifiées, c'est-à-dire qu'on doit avoir :

$$\begin{cases} \sigma < -H'(z_- - w_-) = \lambda_1(z_-, w_-) \\ \lambda_1(z_+, w_+) = -H'(z_+ - w_+) < \sigma < H'(z_+ - w_+) = \lambda_2(z_+, w_+) \end{cases}$$

On choisit donc de prendre la pente σ négative.

On fait une étude formelle des deux équations intervenant dans (5.3), ce qui nous permet d'écrire les deux lemmes suivants. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on définit la fonction f de classe C^p sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(y) = -\sqrt{\dfrac{H(x+y) - H(x)}{G(x+y) - G(x)}} \quad \text{si} \quad y \neq 0 \\ f(0) = -H'(x) \end{cases}$$

Lemme 5.1. *Pour y assez petit, on a :*

$$f(y) = -H'(x) - \frac{1}{2}yH''(x) - \frac{1}{6}y^2 H^{(3)}(x) - \frac{1}{24}y^2 H''(x)G''(x)H'(x) + O(y^3).$$

Il suffit de faire un développement limité des fonction H et G en x et de remarquer que $H' > 0$ pour obtenir ce lemme □

Pour étudier (RH_2), on définit trois fonctions $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ et $\widetilde{H}$ de classe C^p sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} \widetilde{H}(x,y) = \dfrac{H(x+y) - H(x-y)}{2y} \quad \text{si} \quad y \neq 0; \qquad \widetilde{H}(x,0) = H'(x) \\ \widetilde{G}(x,y) = \dfrac{G(x+y) - G(x-y)}{2y} \quad \text{si} \quad y \neq 0; \qquad \widetilde{G}(x,0) = G'(x) \\ \widetilde{F}(x,y) = \widetilde{G}(x,y)\widetilde{H}(x,y) \end{cases}$$

D'après (1.10), la fonction $\widetilde{F}$ vérifie :

$$\begin{cases} \widetilde{F}(x,y) = \widetilde{F}(x,-y) \\ \widetilde{F}(x,0) = 1 \end{cases}$$

Il existe donc une fonction F_1 de classe C^{p-2} sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\sqrt{\widetilde{F}(x,y)} = 1 + 2y^2 F_1(x,y). \tag{5.4}$$

Avec ces nouvelles notations, l'équation (RH_2) s'écrit :

$$[z+w]^2 = \left(1 + 2[z-w]^2 F_1(z_+ + z_- - w_+ - w_-, [z-w])\right)^2 [z-w]^2. \tag{5.5}$$

On remarque, en revenant au système (5.2), que $[z+w]$ et $[z-w]$ ont même signe car σ est négative. On peut donc écrire (5.5) en enlevant les carrés et on obtient après simplification :

$$[w] = F_1(z_+ + z_- - w_+ - w_-, [z-w]) \; [z-w]^3. \tag{5.6}$$

On suppose z_+ et z_- connus et on prend $w_- = 0$.

Lemme 5.2. *Si $[z]$ est assez petit et si w_- est nulle, l'équation (5.6) admet une unique solution w_+ qui vérifie :*

$$w_+ = W(z_+, z_-)\ [z]^3$$

où W est une fonction de classe C^{p-2} sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve. On a supposé que $w_- = 0$, l'équation (5.6) s'écrit alors :

$$w_+ = F_1(z_+ + z_- - w_+, [z - w])\ [z - w]^3. \tag{5.7}$$

On pose :

$$\begin{cases} x = \dfrac{w_+}{[z]^3} \\ G(z_+, z_-, x) = x - F_1(z_+ - x[z]^3 + z_-, [z - x[z]^3])(1 - x[z]^2)^3 \end{cases}$$

D'après (5.7), on a $G(z_+, z_-, x) = 0$. De plus, $\partial_x G(z_+, z_-, x) = 1 + O([z]^2)$ donc, d'après le théorème des fonctions implicites, si le saut de z est assez petit, il existe une unique application W de classe C^{p-2} sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $x = W(z_+, z_-)$ □

Remarque. Ce résultat a été montré, dans un cadre plus général, par P.D Lax [11].

6. Construction du schéma itératif.

On note $x = \varphi(t)$ la courbe de choc que l'on cherche à calculer et on fait le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} y = x - \varphi(t) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ y = x - \alpha t & \text{si} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

où $\alpha = g(0)$. On définit également :

$$\begin{cases} \sigma = \varphi'(t) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ \sigma = \alpha & \text{si} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

Le changement de variables (6.1) permet de fixer la courbe de choc en $y = 0$. On note encore w et z les fonctions obtenues dans les variables t et y. Elles sont solutions du système :

$$\begin{cases} \begin{cases} \partial_t w(t,y) + \Big(H'(z - w)(t,y)) - \sigma(t)\Big)\partial_y w(t,y) = 0 \\ \partial_t z(t,y) - \Big(H'(z - w)(t,y)) + \sigma(t)\Big)\partial_y z(t,y) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} z(-1,y) = z_0(y) \\ w(-1,y) = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{6.3}$$

Tous les résultats donnés sont locaux, on définit les ouverts suivants :

$$\begin{cases} \Omega_0 = \{(t,y)\,;\, -1 \leqslant t \leqslant 0\,;\, -\varepsilon < y < \varepsilon\} \\ \Omega_+ = \{(t,y)\,;\, 0 < t < \eta\,;\, 0 < y < \varepsilon - t\} \\ \Omega_- = \{(t,y)\,;\, 0 < t < \eta\,;\, -\varepsilon + t < y < 0\} \\ \Omega = \Omega_0 \cup \overline{\Omega}_+ \cup \overline{\Omega}_- \end{cases} \tag{6.4}$$

On linéarise alors en considérant les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_t z^{\nu+1} - \Big(H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu\Big)\partial_y z^{\nu+1} = 0 & \text{sur} \quad \Omega \\ z^{\nu+1}(-1,y) = z_0(y) & \text{sur} \quad \mathbb{R} \end{cases} \tag{6.5}$$

$$(6.6) \qquad \begin{cases} \partial_t w^{\nu+1} + \Big(H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu\Big)\partial_y w^{\nu+1} = 0 & \text{sur} \quad \Omega \\ w^{\nu+1}(-1,y) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R} \end{cases}$$

où z^ν et w^ν sont des fonctions supposées connues et σ^ν est définie par :

$$(6.7) \qquad \begin{cases} \sigma^\nu = -\sqrt{\dfrac{[H(z^\nu - w^\nu]}{[G(z^\nu - w^\nu]}} & \text{si} \qquad t \geqslant 0 \\ \quad = \alpha & \text{si} \quad 0 \geqslant t \geqslant -1 \end{cases}$$

La fonction nulle est solution de (6.6). Pour obtenir une autre solution, on se donnera $w^{\nu+1}(t, 0^+)$ définie par :

$$(6.8) \qquad w^{\nu+1}(t,0^+) = w_+^{\nu+1} = W(z_+^{\nu+1}, z_-^{\nu+1})\ [z^{\nu+1}]^3$$

et on verra qu'on obtient une solution non nulle. On va dans le prochain paragraphe définir les fonctions z^0 et w^0 qui initialisent le schéma. Elles sont choisies pour être solutions du p-système tant qu'elles sont régulières.

7. Choix des premiers termes.

On prend pour w^0 la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2$. Pour z^0, on choisit la solution obtenue précédemment, i.e la solution entropique du problème de Cauchy suivant :

$$(7.1) \qquad \begin{cases} \partial_t z^0 - H'(z^0)\partial_x z^0 = 0 & \text{sur} \quad \Omega \\ z^0(-1,x) = z_0(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R} \end{cases}$$

On reconnait l'équation étudiée aux premiers paragraphes où le temps a été translaté de -1. On sait donc que le système (7.1) admet une solution faible entropique qui présente un choc à l'instant $t_0 = 0$ et au point $x_0 = (t_0+1)g(0) = \alpha$. De plus, la courbe de choc a pour équation $x = \alpha(t+1) + \varphi^0(t)$ où la fonction φ^0 appartient à $C^{\frac{3}{2}}([0,\eta[) \cap C^p(]0,\eta[)$ et vérifie :

$$(7.2) \qquad \varphi^0(t) = O(t^2).$$

Remarque. Le résultat est local car on ne suppose plus que, pour tout y réel, $yg''(y) > 0$.

On pose :

$$(7.3) \qquad \begin{cases} \sigma^0(t) = (\varphi^0)'(t) + \alpha & \text{si} \qquad t \geqslant 0 \\ \quad = \alpha & \text{si} \quad 0 \geqslant t \geqslant -1 \end{cases}$$

La fonction σ^0 est la solution de l'équation de Rankine-Hugoniot ; on a donc :

$$(7.4) \qquad \sigma^0 = -\frac{[H(z^0)]}{[z^0]} \quad \text{si} \quad t \geqslant 0.$$

On fait le changement de variables suivant :

$$(7.5) \qquad \begin{cases} y = x - \alpha(t+1) - \varphi_0(t) & \text{si} \qquad t \geqslant 0 \\ y = x - \alpha(t+1) & \text{si} \quad 0 \geqslant t \geqslant -1 \end{cases}$$

qui redresse la courbe de choc en $y = 0$. On note encore z^0 la solution de (7.1) dans les variables (t, y) ; elle vérifie l'équation suivante :

$$(7.6) \qquad \begin{cases} \partial_t z^0 - (H'(z^0) + \sigma^0)\partial_y z^0 = 0 & \text{sur } \Omega \\ z^0(-1,x) = z_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Remarque. La solution z^0 est entropique et la fonction H'' est strictement négative donc :

$$[z^0] < 0. \tag{7.7}$$

Le théorème 2, dans ces nouvelles variables, donne l'estimation suivante :

$$\left\{\begin{aligned} z^0(t,y) - z^0(t_0,x_0) &= O\big((t^3+y^2)^{\frac{1}{6}}\big) \\ \partial_y z^0(t,y) &= O\big((t^3+y^2)^{-\frac{1}{3}}\big) \\ \partial^2_{y^2} z^0(t,y) &= O\big((t^3+y^2)^{-\frac{5}{6}}\big) \end{aligned}\right. \tag{7.8}$$

Pour résoudre les systèmes linéarisés, on va avoir besoin de résultats complémentaires sur z^0.

On a vu, dans le deuxième paragraphe, que les caractéristiques de z^0 existent et sont des droites dans les variables (t,x) d'équation $x = y + (t+1)g(y)$ où t est remplacé par $t+1$ car la condition initiale est prise en $t = -1$ et où y est le pied de la caractéristique. On sait qu'elles sont de pente strictement négative sur Ω_+ car $g(y)$ est strictement négatif pour tout y réel. On se place sur Ω_+ et on considère la caractéristique du système (7.6) qui passe par le point (s,y) de Ω_+ et de point générique $\big(t,\xi(t,s,y)\big)$. Elle est définie par l'équation intégrale suivante en tenant compte du changement de variables fait pour redresser le choc :

$$\xi(t,s,y) + \alpha(t+1) + \varphi^0(t) = \xi_0 + (t+1)g(\xi_0) \tag{7.9}$$

où on appelle ξ_0 le pied de cette caractéristique. On remarque que, pour η assez petit, la pente d'une caractéristique est de l'ordre de :

$$\frac{1}{g(\xi_0)-\alpha} = \frac{1}{g(\xi_0)-g(0)} = \frac{1}{\xi_0\, g'(\theta\,\xi_0)} \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

On prend alors ε assez petit pour que cette pente soit inférieure à -1 pour tout $\xi_0 \in [0,\varepsilon]$. La caractéristique de z^0 de pied $\xi_0 \in [0,\varepsilon]$ quitte alors le domaine $\overline{\Omega}_+$ en $y=0$.

On a les trois lemmes suivants :

Lemme 7.1. *La caractéristique $t \to \xi(t,s,y)$ de z^0 qui passe par le point (s,y) de Ω_+ vérifie pour $s \geqslant t \geqslant 0$:*

$$\xi(t,s,y) - y = \sqrt{s}(s-t) + O\big(s\,(s-t) + y^{\frac{1}{3}}\,(s-t)\big).$$

$$\text{On pose : } I \overset{\text{déf}}{=} \int_0^s -\big(\partial_y H'(z^0)\big)\big(t,\xi(t,s,y)\big)\,dt.$$

Lemme 7.2. *Il existe $c > 0$ telle que, pour $s > 0$ et $y \geqslant 0$ assez petits, on ait :*

$$(1) \qquad |I| \leqslant \ln\left(\frac{3}{2}\right) + c\sqrt{s}$$

$$(2) \qquad I = -\int_0^s |\big(\partial_y H'(z^0)\big)\big(t,\xi(t,s,y)\big)|\,dt$$

On considère la caractéristique définie en (7.9) et on se donne une fonction régulière $(t,s,y) \to \zeta(t,s,y)$ vérifiant : il existe une constante R strictement positive telle que, pour tout $(s,y) \in \overline{\Omega}_+$, pour tout $t \in [0,s]$, on ait :

$$|\zeta(t,s,y) - \xi(t,s,y)| \leqslant R\,s\,(s-t). \tag{7.10}$$

Lemme 7.3. *Pour ε et η, définis en (6.4), assez petits, il existe une constante $\widetilde{C}$ ne dépendant que de R telle que, pour tout $(s,y) \in \overline{\Omega}_+$ et $t \in [0,s]$, on ait :*

$$|\Big(\partial_y\big(H'(z^0)\big)\Big)\big(t,\zeta(t,s,y)\big)| \leqslant (1+\widetilde{C}\sqrt{s})|\Big(\partial_y\big(H'(z^0)\big)\Big)\big(t,\xi(t,s,y)\big)|.$$

Ces lemmes sont démontrés dans le dernier paragraphe. En regroupant les deux derniers, on obtient :

Lemme 7.4. *Soit ζ une fonction vérifiant (7.10), alors pour ε et η, assez petits, il existe une constante C ne dépendant que de R telle que, pour tout $(s,y) \in \overline{\Omega}_+$ et $t \in [0,s]$, on ait :*

$$\Big|\int_0^s \big(\partial_y H'(z^0)\big)\big(t,\zeta(t,s,y)\big)\,dt\Big| \leqslant \ln\Big(\frac{3}{2}\Big) + C\sqrt{s}.$$

La fonction $t \to \zeta(t,s,y)$ sera la caractéristique de $z^{\nu+1}$ passant par le point (s,y) et ce dernier lemme nous permettra d'obtenir des estimations uniformes sur les suites de fonctions z^ν et w^ν. Pour définir entièrement le schéma, il suffit maintenant de choisir z^ν et w^ν.

8. Hypothèses de récurrence.

a) On se donne une fonction z^ν définie sur Ω et vérifiant les conditions suivantes :

(1) $z^\nu = z^0$ sur $\Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-$.

(2) $z^\nu \in C^1(\overline{\Omega}_+ \setminus (0,0))$.

(3) Il existe deux constantes M et M' strictement positives telles que, pour tout $(t,y) \in \overline{\Omega}_+$, on ait :

$$\left\{\begin{aligned} &|z^\nu(t,y) - z^0(t,y)| \leqslant M\,t \\ &|\partial_y(z^\nu - z^0)(t,y)| \leqslant \frac{M'}{(t^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} \quad \text{pour} \quad (t,y) \neq (0,0). \end{aligned}\right. \tag{8.1}$$

b) On se donne une fonction w^ν définie sur Ω et vérifiant les conditions suivantes :

(1) $w^\nu = 0$ sur $\Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-$.

(2) $w^\nu \in C^1(\overline{\Omega}_+ \setminus (0,0))$.

(3) Il existe deux constantes N et N' strictement positives telles que, pour tout $(t,y) \in \overline{\Omega}_+$, on ait :

$$\left\{\begin{aligned} &|w^\nu(t,y)| \leqslant N\,t^{\frac{3}{2}} \\ &|\partial_y w^\nu(t,y)| \leqslant N'\sqrt{t}. \end{aligned}\right. \tag{8.2}$$

Avant d'étudier les systèmes linéarisés, on va donner également une estimation de $\sigma^\nu - \sigma^0$. On pose :

$$C_- = \operatorname*{Max}_{t\in[1,1+\eta]}\Big\{|H''(z^0_-)|\,;\ |H''(z^0_-)G''(z^0_-)H'(z^0_-)|\Big\}.$$

Proposition 8.1. *Il existe $\eta > 0$ tel que, pour toutes les fonctions z^ν et w^ν vérifiant les hypothèses précédentes, on ait l'estimation suivante, pour tout $t \in [0,\eta[$:*

$$|\sigma^\nu - \sigma^0| \leqslant P\,t$$

avec $P = (M + \frac{1}{12}(C_Q)^2)C_-$ *où C_Q a été défini dans le théorème 1.*

On rappelle qu'on a :

$$\sigma^0 = -\frac{[H(z^0]}{[z^0]} \quad ; \quad \sigma^\nu = -\sqrt{\frac{[H(z^\nu - w^\nu)]}{[G(z^\nu - w^\nu)]}} \tag{8.3}$$

On note $z^0_-(t) = z^0_- = z^0(t,0^-)$. On fait un développement limité de H en z^0_- :

$$[H(z^0)] = [z^0]H'(z^0_-) + \frac{1}{2}[z^0]^2H''(z^0_-) + \frac{1}{6}[z^0]^3H^{(3)}(z^0_-) + O([z^0]^4).$$

D'après le théorème 2, il existe une constante C_0 strictement positive telle que :

$$|\,[z^0]\,| \leqslant C_0\sqrt{t} \tag{8.4}$$

On a donc :

$$\sigma^0 = -H'(z_-^0) - \frac{1}{2}[z^0]H''(z_-^0) - \frac{1}{6}[z^0]^2H^{(3)}(z_-^0) + O(t^{\frac{3}{2}}). \tag{8.5}$$

On utilise le lemme 5.1 pour obtenir un développement limité de σ^ν et on remarque que $z_-^\nu = z_-^0$ et $w_-^\nu = 0$ d'après le choix de ces fonctions donc :

$$\begin{aligned}\sigma^\nu = &- H'(z_-^0) - \frac{1}{2}[z^\nu - w^\nu]H''(z_-^0) - \frac{1}{6}[z^\nu - w^\nu]^2H^{(3)}(z_-^0)\\ &- \frac{1}{24}[z^\nu - w^\nu]^2H''(z_-^0)G''(z_-^0)H'(z_-^0) + O\Big([z^\nu - w^\nu]^3\Big).\end{aligned}$$

Les hypothèses (8.1) et (8.2) sur z^ν et w^ν entraînent alors que :

$$\left\{\begin{aligned}\sigma^\nu - \sigma^0 = &- \frac{1}{2}[z^\nu - z^0]H''(z_-^0) - \frac{1}{6}([z^\nu]^2 - [z^0]^2)H^{(3)}(z_-^0)\\ &- \frac{1}{24}[z^\nu]^2H''(z_-^0)G''(z_-^0)H'(z_-^0) + O(t^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}\right. \tag{8.6}$$

De plus : $[z^\nu]^2 - [z^0]^2 = [z^\nu - z^0]\,[z^0] = O(t^{\frac{3}{2}})$. On a donc montré :

Lemme 8.1.

(1) *Il existe une constante $D = D(M, N)$ dépendant continûment de M et N telle que :*

$$|\,\sigma^\nu - \sigma^0 + \frac{1}{2}[z^\nu - z^0]H''(z_-^0) + \frac{1}{24}[z^0]^2H''(z_-^0)G''(z_-^0)H'(z_-^0)\,| \leqslant D\,t^{\frac{3}{2}}$$

(2) *Il existe $\eta > 0$ tel que la fonction σ^ν soit de classe C^1 sur $[\,0, \eta\,[$.*

Preuve. Le deuxième point est évident d'après la régularité des fonctions z^ν et w^ν □
D'après le lemme précédent et la notation (8.4), on a :

$$|\,\sigma^\nu - \sigma^0\,| \leqslant (\frac{1}{2}M + \frac{1}{24}(C_0)^2)C_-\,t + D\,t^{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{P}{2}\,t + D\,t^{\frac{3}{2}}.$$

On prend η assez petit pour avoir $D\sqrt{t} \leqslant \dfrac{P}{2}$ pour tout $0 \leqslant t < \eta$ et on obtient la proposition 8.1 □

On va maintenant résoudre les deux systèmes linéarisés.

9. Calcul de $z^{\nu+1}$.

On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{aligned}\partial_t z^{\nu+1} - \big(H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu\big)\partial_y z^{\nu+1} &= 0\\ z^{\nu+1}(-1, y) &= z_0(y)\end{aligned}\right. \tag{9.1}$$

D'après les hypothèses (8.1) et (8.2) faites sur les fonctions z^ν, w^ν et σ^ν, le système (9.1) s'écrit sur $\Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-$ sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned}\partial_t z^{\nu+1} - \big(H'(z^0) + \alpha\big)\partial_y z^{\nu+1} &= 0\\ z^{\nu+1}(-1, y) &= z_0(y)\end{aligned}\right.$$

z^0 est solution de cette équation, on peut donc prendre :

$$z^{\nu+1} = z^0 \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-. \tag{9.2}$$

Pour résoudre l'équation (9.1) sur $\overline{\Omega}_+$, on va montrer l'existence et l'unicité des caractéristiques. On se fixe s et y positifs. La caractéristique $t \to \xi^{\nu+1}(t,s,y)$ de $z^{\nu+1}$ qui passe par (s,y) est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(9.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi^{\nu+1}}{\partial t}(t,s,y) = -H'(z^\nu - w^\nu)(t, \xi^{\nu+1}(t,s,y)) - \sigma^\nu \\ \xi^{\nu+1}(s,s,y) = y \end{cases}$$

or la fonction F définie par :

$$F \; : \begin{cases} \overline{\Omega}_+ \setminus \{t = 0\} \to \mathbb{R} \\ \qquad (t,y) \to -\, H'(z^\nu - w^\nu)(t,y) - \sigma^\nu(t) \end{cases}$$

est de classe C^1 donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité d'une solution maximale $\xi^{\nu+1}$ de classe C^1.

L'existence des caractéristiques ne nous permet a priori pas de déterminer $z^{\nu+1}$; il faut également montrer qu'elles sortent de Ω_+ par le côté $t = 0$. On va donc donner une estimation plus précise des caractéristiques de $z^{\nu+1}$. On note $t \to \xi^{\nu+1}(t,s,y)$ (respectivement $\xi^0(t,s,y)$) la caractéristique de $z^{\nu+1}$ (resp. z^0) qui passe par le point (s,y) de $\overline{\Omega}_+$.

Lemme 9.1. *Si ε et η sont assez petits alors il existe une constante R strictement positive dépendant de M, N et P définis précédemment telle que, pour tout s strictement positif et pour tout t de $[0,s]$, on ait :*

$$|\xi^{\nu+1}(t,s,y) - \xi^0(t,s,y)| \leqslant R\, s\,(s-t).$$

On déduit de ce lemme, démontré dans le dernier paragraphe, et du lemme 7.1 que, si ε est assez petit, la pente d'une caractéristique de $z^{\nu+1}$ est du signe de celle de l'équation scalaire au voisinage du choc, donc négative ; elle est, de plus, strictement inférieure à -1.

La caractéristique de $z^{\nu+1}$ qui passe par le point (s,y) de $\overline{\Omega}_+ \setminus \{t=0\}$ ressort donc par le côté $t=0$ et on peut entièrement définir $z^{\nu+1}$ sur Ω_+ en posant :

$$(9.3) \qquad z^{\nu+1}(s,y) = z^0\big(0, \xi^{\nu+1}(0,s,y)\big).$$

On remarque que l'on a également :

$$(9.4) \qquad z^{\nu+1} \in C^1\Big(\overline{\Omega}_+ \setminus (1,0)\Big).$$

On pose $v(s,y) = \big(z^{\nu+1} - z^0\big)(s,y)$ et on en cherche une majoration. v est alors solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(9.5) \qquad \begin{cases} \partial_t v - \big(H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu\big)\,\partial_y v = \big(H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0\big)\partial_y z^0 \\ \qquad\qquad v(0,y) = 0 \end{cases}$$

On intègre le long d'une caractéristique $t \to \xi^{\nu+1}(t,s,y)$ de $z^{\nu+1}$ et on obtient que :

$$(9.6) \qquad v(s,y) = \int_0^s \big(H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0\big)\partial_y z^0\big(t, \xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\, dt.$$

On pose :

$$C^0 = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,\eta]} \Big| \big(H'H''G''\big)\big(z_-^0(t)\big) \Big| (C_0)^3$$

où C_0 a été défini au théorème 1 et on suppose que la constante M définie en (8.1) vérifie :

$$(9.7) \qquad M \geqslant 10\, C^0.$$

On veut montrer que la majoration donnée dans (8.1) est uniforme, i.e que l'on a :

Proposition 9.1. *Il existe η strictement positif tel que , pour tout $(s,y) \in \overline{\Omega}_+$, on ait :*

$$\left|(z^{\nu+1} - z^0)(s,y)\right| \leqslant M\, s.$$

On va décomposer la preuve de cette proposition en montrant que :

Lemme 9.2. *Il existe une constante C strictement positive dépendant continûment de M, N et R définis précédemment telle que :*

(1)

$$\left|\int_0^s \big(H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0)\big)\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\,dt\right| \leqslant M\, s \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C(s^{\frac{3}{2}}).$$

(2)

$$\left|\int_0^s (\sigma^\nu - \sigma^0)\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\,dt\right| \leqslant \left(\frac{1}{2} M \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C^0\right) s + C\, s^{\frac{3}{2}}.$$

La formule (9.6) nous donne alors :

Lemme 9.3. *Il existe une constante C telle que, pour tout $(s,y) \in \Omega_+$, on ait :*

$$\left|(z^{\nu+1} - z^0)(s,y)\right| \leqslant \frac{3}{4} M\, s + C\, s^{\frac{3}{2}}.$$

Preuve du lemme 9.2.

Pour montrer le premier point, on utilise la formule de Taylor-Lagrange, il existe donc $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned}\int_0^s \big(H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0)\big)\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\,dt = \\ \int_0^s (z^\nu - w^\nu - z^0)\, H''(z^0)\, \partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\,dt \\ + \int_0^s (z^\nu - w^\nu - z^0)^2\, H^{(3)}\big(z^0 + \theta\,(z^\nu - w^\nu - z^0)\big)\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\,dt.\end{aligned}$$

Le deuxième terme se majore simplement en utilisant les estimations faites sur les fonctions $z^\nu - z^0$ et w^ν et la majoration de $\partial_y z^0$ par $1/t$:

$$\left|\int_0^s (z^\nu - w^\nu - z^0)^2\, H^{(3)}\big(z^0 + \theta\,(z^\nu - w^\nu - z^0)\big)\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\,dt\right| \leqslant C\, s^2$$

où C est un majorant de $H^{(3)}\big(z^0 + \theta\,(z^\nu - w^\nu - z^0)\big)$ sur Ω. Il dépend donc continûment de M et N.

Pour majorer le terme restant, on utilise les majorations de $z^\nu - z^0$ et w^ν par $M\,t$ et $N\,t^{\frac{3}{2}}$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^s (z^\nu - w^\nu - z^0)\, H''(z^0)\, \partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\,dt\right| \\ &\leqslant (M + N\sqrt{s})\, s \int_t^s \left|\partial_y\big(H'(z^0)\big)(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y))\right| dt \\ &\leqslant M\, s \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\, s^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

d'après le lemme 7.4 car $\left|(\xi^{\nu+1} - \xi^0)(t,s,y)\right| \leqslant R\, s\,(s-t)$. On a donc le premier point du lemme 9.2

Pour prouver le deuxième point, on reprend le développement limité de $\sigma^\nu - \sigma^0$ qui nous est donné par le lemme 5.1 et on a :

$$\Big| \int_0^s (\sigma^\nu - \sigma^0)\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big) \Big| dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^s \Big| [z^\nu - z^0] H''(z^0_-)\,\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\Big| dt$$
$$+ \frac{1}{24}\int_0^s \Big| [z^0]^2 (H''G''H')(z^0_-)\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\Big| dt + D\,C_0\, s^{\frac{3}{2}}.$$

Le deuxième terme se majore par :

$$\int_0^s \Big| [z^0]^2 (H''G''H')(z^0_-)\,\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\big)\Big| dt \leqslant C^0 s$$

car $[z^0](t) = O(\sqrt{t})$ et $\partial_y z^0(t,y) = O(1/t)$. Pour l'autre terme, on se sert à nouveau du lemme 7.4 ; par un calcul similaire à celui fait dans la première partie, on obtient :

$$\int_0^s \Big| [z^\nu - z^0] H''(z^0_-)\,\partial_y z^0\big(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)\Big| dt \leqslant M\,(1+\widetilde{C}\sqrt{s})\,s\,(\ln\Big(\frac{3}{2}\Big) + c\sqrt{s}) + C\,s^{\frac{3}{2}}$$
$$\leqslant M\,s\,\ln\big(\frac{3}{2}\big) + C\,s^{\frac{3}{2}}.$$

On regroupe ces deux résultats et on a prouvé le lemme 9.2 en utilisant $\ln(3/2) < 1/2$. Le lemme 9.3 est une conséquence de ce lemme appliqué à l'égalité (9.6) en utilisant l'hypothèse (9.7) $\square$

10. Calcul de $w^{\nu+1}$.

On veut résoudre le système suivant :

$$\text{(10.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t w^{\nu+1} + \big(H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu\big)\partial_y w^{\nu+1} = 0 \\ w^{\nu+1}(-1,y) = 0 \end{cases}$$

D'après les hypothèses (8.1) et (8.2) faites sur les fonctions z^ν, w^ν et σ^ν, le système (10.1) s'écrit sur $\Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t w^{\nu+1} + \big(H'(z^0) - \alpha\big)\partial_y w^{\nu+1} = 0 \\ w^{\nu+1}(0,y) = 0 \end{cases}$$

La fonction nulle est solution de cette équation, on peut donc prendre :

$$\text{(10.2)} \qquad w^{\nu+1} = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \cup \overline{\Omega}_-.$$

Pour résoudre sur $\overline{\Omega}_+$, on étudie l'existence des caractéristiques. On se fixe s et x positifs. La caractéristique $t \to \xi^{\nu+1}(t,s,y)$ de $w^{\nu+1}$ qui passe par (s,y) est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\text{(10.3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi^{\nu+1}}{\partial t}(t,s,y) = H'(z^\nu - w^\nu)(t,\xi^{\nu+1}(t,s,y)) - \sigma^\nu(t) \\ \xi^{\nu+1}(s,s,y) = y \end{cases}$$

or H' est une fonction strictement positive ainsi que la fonction $-\sigma^\nu$ donc les caractéristiques, si elles existent, sont de pente strictement positive.

La fonction F définie par :

$$F \;:\; \begin{cases} \overline{\Omega}_+ \setminus (0,0) \to \mathbb{R} \\ (t,y) \to H'(z^\nu - w^\nu)(t,y) - \sigma^\nu(t) \end{cases}$$

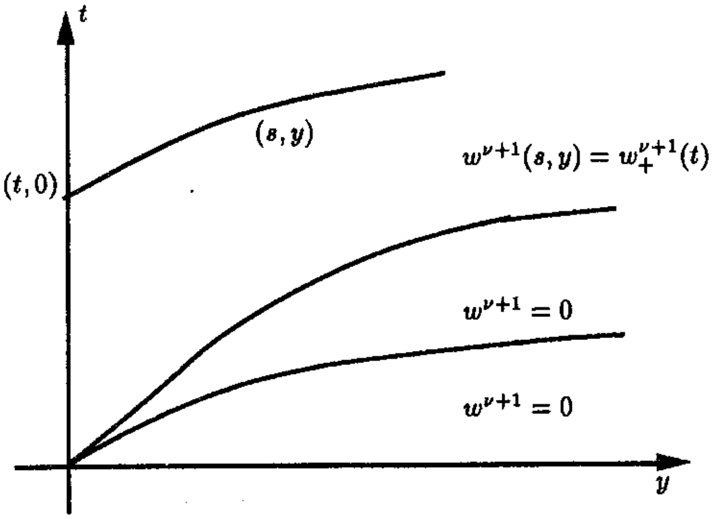

FIG. 10.1

est de classe C^1 donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité d'une solution maximale $\xi^{\nu+1}$ de classe C^1.

Pour définir une solution de (10.1) sur $\overline{\Omega}_+$, on doit donc se donner une valeur $w_+^{\nu+1}(t)$. On prend la solution de la deuxième équation de Rankine-Hugoniot et on a vu dans le lemme 5.2 que l'on a :

$$w_+^{\nu+1} = W(z_-^{\nu+1}, z_+^{\nu+1})\,[z^{\nu+1}]^3.$$

On définit $w^{\nu+1}$ solution de (10.1) par :

$$w^{\nu+1}(s,y) = w_+^{\nu+1}(t) \tag{10.4}$$

où $(t,0)$ et (s,y) appartiennent à la même caractéristique. On remarque que l'on a bien :

$$w^{\nu+1} \in C^1\Big(\overline{\Omega}_+ \setminus (0,0)\Big). \tag{10.5}$$

On obtient alors une majoration de w^ν. On pose :

$$W_0 = W_0(M) = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,\eta]} \big| W(z_-^{\nu+1}(t), z_+^{\nu+1}(t)) \big|.$$

Cette constante W_0 dépend de la constante M utilisée dans la proposition 9.1. On suppose que la constante N définie en (8.2) vérifie :

$$N \geqslant 2\,(C_0)^3\, W_0(M). \tag{10.6}$$

Proposition 10.1. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ assez petits tels que, pour tout $(s,y) \in \overline{\Omega}_+$, on ait :*

$$\big| w^{\nu+1}(s,y) \big| \leqslant N\, s^{\frac{3}{2}}.$$

Preuve. On reprend l'expression (10.4) et on a :

$$\begin{aligned} | w^{\nu+1}(t, \xi^{\nu+1}(t,s,0)) | &\leqslant W_0 \,\big| [z^{\nu+1}] \big|^3 \\ &\leqslant W_0\,(C_0)^3\,(1 + M\sqrt{s})\, s^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Or on a vu que les caractéristiques étaient de pente strictement positive donc $s \leqslant t$ et on a démontré le lemme d'après (10.6) □

Les propositions 9.1 et 10.1 ont donc montré qu'on avait des estimations uniformes sur les suites de fonctions $(z^\nu)_\nu$ et $(w^\nu)_\nu$.

Proposition 10.2. *Si η et ε sont assez petits, alors il existe deux constantes M et N strictement positives telles que, pour tout ν entier et pour tout (s,y) dans Ω, on ait :*

$$|(z^\nu - z^0)(s,y)| \leqslant M\, s$$
$$|w^\nu(s,y)| \leqslant N\, s^{\frac{3}{2}}$$

On va également montrer qu'on a des estimations uniformes sur les dérivées partielles.

11. Estimation uniforme des dérivées partielles.

Le but de ce paragraphe est de montrer les estimations suivantes.

Proposition 11.1. *Si η et ε sont assez petits, alors il existe deux constantes M' et N' strictement positives telles que, pour tout ν entier et pour tout (s,y) dans $\overline{\Omega}_+ \setminus (0,0)$, on ait :*

$$|\partial_y(z^\nu - z^0)(s,y)| \leqslant \frac{M'}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}}$$
$$|\partial_y w^\nu(s,y)| \leqslant N'\sqrt{s}$$

11.1 Estimation des dérivées partielles de $z^{\nu+1}$.

On va d'abord donner trois lemmes techniques qui seront démontrés dans un paragraphe ultérieur. On note $t \to \xi(t,s,y)$ la caractéristique de $z^{\nu+1}$ qui passe par le point (s,y) de $\overline{\Omega}_+$.

Lemme 11.1. *Pour $t \in [0,s]$, on a :*

$$t^3 + \big(\xi(t,s,y)\big)^2 \geqslant \frac{1}{\beta}(s^3+y^2) \qquad \text{avec} \quad \beta = \frac{16}{5}.$$

Remarque. La constante β a une valeur purement technique comme on le verra dans la preuve de ce lemme, elle a été choisie égale à 16/5 pour simplifier un peu les calculs.

On pose :

$$(11.1) \qquad \begin{aligned} C_2 &= \operatorname*{Sup}_{(s,y)\in\overline{\Omega}_+\,;\,\theta\in[0,1]} |H''\big(z^0(s,y) + \theta\,(z^\nu - z^0)(s,y)\big)| \\ M_0 &= \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{6}}\, C_0\,(C_2\, M + P) \end{aligned}$$

et on suppose que la constante M' définie en (8.1) vérifie :

$$(11.2) \qquad M' > 30\, M_0.$$

Lemme 11.2. *Si η et ε sont assez petits, alors il existe une constante C indépendante de M' et N' et une constante $C(M',N')$ telles que, pour tout (s,y) dans $\overline{\Omega}_+ \setminus (0,0)$, on ait :*

$$\begin{aligned} A &\overset{\text{déf}}{=} \int_0^s \Big| \big(H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0\big)\frac{\partial^2}{\partial y^2} z^0\big(t,\xi(t,s,y)\big)\Big|\, dt \\ &\leqslant \frac{M_0}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + C \\ B &\overset{\text{déf}}{=} \int_0^s \Big| \big(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)\big)\big(\partial_y z^0\big(t,\xi(t,s,y)\big)\big)^2\Big|\, dt \leqslant C \\ C &\overset{\text{déf}}{=} \int_0^s \Big| H''(z^\nu - w^\nu)\,\partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)\,\partial_y z^0\big(t,\xi(t,s,y)\big)\Big|\, dt \\ &\leqslant \beta^{\frac{1}{6}}\ln\Big(\frac{3}{2}\Big)\frac{M'}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M',N')\sqrt{s} \end{aligned}$$

Lemme 11.3.
Il existe une constante $C(M', N')$ telle que :

$$\int_0^s \left| H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t, s, y)) \right| dt \leqslant \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C(M', N')\sqrt{s}.$$

On va supposer que ces trois lemmes sont démontrés et on prouve alors que :

Lemme 11.4. *Il existe une constante $C(M', N')$ dépendant continûment de M' et N' telle que :*

$$\left| \partial_y (z^{\nu+1} - z^0)(s, y) \right| \leqslant (2M_0 + \frac{9}{10} M') \frac{1}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N').$$

Remarque. La notation $C(M', N')$ représente une constante qui dépend de M' et N' dont la valeur peut éventuellement changer au cours de la démonstration.

Preuve du lemme 11.4. On pose $v(s, y) = \partial_y (z^{\nu+1} - z^0)(s, y)$. On dérive l'équation (9.5) par rapport à y et on obtient que v est solution de :

(11.3)
$$\begin{cases} \partial_t v - \left(H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu\right) \partial_y v = \left(H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0\right) \dfrac{\partial^2 z^0}{\partial y^2} \\ \qquad + H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu)\, v + \left(H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu) - H''(z^0) \partial_y z^0\right) \partial_y z^0. \\ v(0, y) = 0 \end{cases}$$

Les fonctions v et $z^{\nu+1}$ ont les mêmes caractéristiques ; on intègre le long de l'une d'entre elles :

$$\begin{aligned} |v(s, y)| \leqslant & \int_0^s \left| \left(H'(z^\nu - w^\nu) - H'(z^0) + \sigma^\nu - \sigma^0\right) \frac{\partial^2 z^0}{\partial y^2}(t, \xi(t, s, y)) \right| dt \\ & + \int_0^s \left| \left(H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y (z^\nu - w^\nu) - H''(z^0) \partial_y z^0\right) \partial_y z^0 (t, \xi(t, s, y)) \right| dt \\ & + \int_0^s \left| H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu)\, v(t, \xi(t, s, y)) \right| dt \end{aligned}$$

On utilise une inégalité triangulaire sur le deuxième terme et le lemme 11.2 sur le premier, d'où :

$$\begin{aligned} |v(s, y)| \leqslant & \frac{M_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C \\ & + \int_0^s \left| \left(H''(z^\nu - w^\nu) \partial_y (z^\nu - z^0 - w^\nu) \partial_y z^0 \right| dt \\ & + \int_0^s \left| \left(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)\right) (\partial_y z^0)^2 (t, \xi(t, s, y)) \right| dt \\ & + \int_0^s \left| H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu)\, v(t, \xi(t, s, y)) \right| dt \end{aligned}$$

Le lemme 11.2 nous permet de majorer les deux premières intégrales et on obtient :

$$\begin{aligned} |v(s, y)| \leqslant & \frac{M_0}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + 2C + \beta^{\frac{1}{3}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \frac{M'}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N')\sqrt{s} \\ & + \int_0^s \left| H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu)\, v(t, \xi(t, s, y)) \right| dt \\ \leqslant & (\beta^{\frac{1}{3}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) M' + M_0) \frac{1}{(s^3 + y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M', N') \\ & + \int_0^s \left| H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu)\, v(t, \xi(t, s, y)) \right| dt \end{aligned}$$

car s est majorée par η.

On pose : $\phi(s,y) = (\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) M' + M_0)\dfrac{1}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M',N')$.

Le lemme de Gronwall permet alors de majorer $v(s,y)$ par :

$$\begin{aligned} |\, v(s,y)\,| \leqslant \phi(s,y) + & \\ & \int_0^s \phi\big(t,\xi(t,s,y)\big)|\, H''(z^\nu - w^\nu)\,\partial_y(z^\nu - w^\nu)\big(t,\xi(t,s,y)\big)\,|\times \\ & \operatorname{Exp}\Big(\int_t^s |\, H''(z^\nu - w^\nu)\,\partial_y(z^\nu - w^\nu)\big(\alpha,\xi(\alpha,s,y)\big)\,|\, d\alpha\Big)\, dt \end{aligned}$$

D'après le lemme 11.3, on a :

$$\operatorname{Exp}\Big(\int_t^s |\, H''(z^\nu - w^\nu)\,\partial_y(z^\nu - w^\nu)\big(\alpha,\xi(\alpha,s,y)\big)\,|\, d\alpha\Big) \leqslant \frac{3}{2} + C(M',N')\sqrt{s}.$$

Les lemmes 11.1 et 11.3 nous donnent également :

$$\begin{aligned} & \int_0^s \phi\big(t,\xi(t,s,y)\big)|\, H''(z^\nu - w^\nu)\,\partial_y(z^\nu - w^\nu)\big(t,\xi(t,s,y)\big)\,|\, dt \\ & \leqslant \Big((\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) M' + M_0)\frac{\beta^{\frac{1}{6}}}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M',N')\Big) \times \\ & \qquad \int_0^s |\, H''(z^\nu - w^\nu)\,\partial_y(z^\nu - w^\nu)(t,\xi(t,s,y))\,|\, dt \\ & \leqslant \Big((\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) M' + M_0)\frac{\beta^{\frac{1}{6}}}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M',N')\Big) \times \\ & \qquad (\ln\left(\frac{3}{2}\right) + C(M',N')\sqrt{s}) \end{aligned}$$

On obtient finalement en regroupant ces différentes estimations :

$$|\, v(s,y)\,| \leqslant (1 + \frac{3}{2}\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right))(\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) M' + M_0)\frac{1}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M',N').$$

Pour conclure, on remarque que :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{2}\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) & \leqslant 2 \\ (1 + \frac{3}{2}\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right))\beta^{\frac{1}{6}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) & \leqslant \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

On a donc montré le lemme 11.4 □

L'hypothèse (11.2) montre alors la première estimation de la proposition 11.1 si l'on suppose s et y assez petits. En effet, on a alors :

$$2\, M_0 + \frac{9}{10} M' < \frac{29}{30} M'$$

donc :

$$\begin{aligned} |\, v(s,y)\,| & \leqslant \frac{29}{30}\frac{M'}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + C(M',N') \\ & \leqslant \frac{M'}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

On peut également obtenir une estimation uniforme de $\partial_t(z^{\nu+1} - z^0)$, on a le :

Lemme 11.5. *Il existe une constante M'' strictement positive dépendant de M' telle que, pour tout $(s,y) \in \overline{\Omega}_+ \setminus (0,0)$, on ait :*

$$|\partial_t z^{\nu+1}(s,y)| \leqslant \frac{M''}{\sqrt{s}}.$$

On revient à l'équation vérifiée par $z^{\nu+1}$ et on a alors :

$$\partial_t z^{\nu+1} = \big(H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu\big)\partial_y z^{\nu+1}.$$

Or, d'après le lemme 11.4 et l'estimation de $\partial_y z^0$ donnée dans le théorème 1, on a, pour t et y assez petits :

$$\begin{aligned}
|\partial_y z^{\nu+1}(s,y)| &\leqslant |\partial_y z^0(s,y)| + |\partial_y(z^{\nu+1} - z^0)(s,y)| \\
&\leqslant \frac{C_0}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{3}}} + \frac{M'}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} \qquad (11.4)\\
&\leqslant \frac{2C_0}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{3}}}.
\end{aligned}$$

Il nous reste à estimer $H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu$ pour obtenir le résultat. D'après le lemme 5.1 qui donne un développement limité de σ^ν et les estimations démontrées précédemment sur z^0, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma^\nu(s) &= -H'(z_-^0(s)) + O\big((s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}\big) \quad \text{d'où} \\
H'(z^\nu - w^\nu)(s,y) + \sigma^\nu(s) &= H'(z^\nu - w^\nu)(s,y) - H'(z_-^0(s)) + O\big((s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}\big) \\
&= \big((z^\nu - w^\nu)(s,y) - z_-^0(s)\big)H''(z_-^0(s)) + O\big((s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}\big) \\
&= (z^\nu(s,y) - z^0(s,y) - w^\nu(s,y))H''(z_-^0(s)) + \\
&\qquad (z^0(s,y) - z_-^0(s))H''(z_-^0(s)) + O\big((s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}\big) \\
&= O\big((s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}\big).
\end{aligned}$$

car $z^\nu(s,y) - z^0(s,y) - w^\nu(s,y) = O(s)$ et $z^0(s,y) - z_-^0(s) = O\big((s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}\big)$.

On regroupe ce résultat avec l'estimation (11.4) et on a démontré le lemme 11.5 □

11.2 Estimation des dérivées partielles de $w^{\nu+1}$.

La fonction $w^{\nu+1}$ est solution de l'équation suivante :

$$\partial_t w^{\nu+1} = -\big(H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu\big)\partial_y w^{\nu+1}$$

or, d'après ce qui précéde, on a $H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu = O(1)$ donc les deux dérivées partielles de $w^{\nu+1}$ sont du même ordre.

Lemme 11.6. *Il existe une constante $C(M')$ qui ne dépend que de M' telle que, pour tout $(s,y) \in \overline{\Omega}_+$, on ait :*

$$\begin{cases} |\partial_s w^{\nu+1}(s,y)| \leqslant C(M'')\sqrt{s} \\ |\partial_y w^{\nu+1}(s,y)| \leqslant C(M'')\sqrt{s} \end{cases}$$

Preuve. On a défini $w^{\nu+1}$ par (10.4) en posant : $w^{\nu+1}(s,y) = w_+^{\nu+1}(t)$ avec $t \leqslant s$ où t est défini de manière unique si s et y sont connus et :

$$w_+^{\nu+1}(t) = W(z_+^{\nu+1}(t), z_-^{\nu+1}(t))\,[z^{\nu+1}]^3.$$

On note C_W une majoration des fonctions $W, \partial_{x_1} W$ et $\partial_{x_2} W$ prises en $z_+^{\nu+1}(t), z_-^{\nu+1}(t)$ pour $t \in [0,\eta]$. La constante C_W dépend de M' et on a, d'après le lemme 11.5 :

$$\begin{aligned}
|\partial_t w_+^{\nu+1}(t)| &\leqslant C_W \left|3\left[z^{\nu+1}\right]^2\left[\partial_t z^{\nu+1}\right] + \left[z^{\nu+1}\right]^3\left(|\partial_t z_-^{\nu+1}| + |\partial_t z_+^{\nu+1}|\right)\right| \\
&\leqslant C_W \left(12\,(C_0)^2 t + 16\,(C_0)^3 t^{\frac{3}{2}}\right)\frac{M''}{\sqrt{t}} \\
&\leqslant 14\, C_W\,(C_0)^2 M'' \sqrt{t} \qquad \text{pour } t \text{ assez petit.}
\end{aligned}$$

On prend $C(M'') = 14\, C_W\,(C_0)^2 M''$ et on a prouvé le lemme car $t \leqslant s$ □

Les lemmes 11.4 et 11.6 montrent la proposition 11.1. En effet, on définit le voisinage du choc sur lequel on travaille par le lemme 11.1 pour obtenir la première estimation de la proposition et on prend $N' = C(M')$.

12. Convergence des suites (z^ν) et (w^ν).

On va montrer que les suites (z^ν) et (w^ν) sont des suites de Cauchy pour la norme L^∞.

Lemme 12.1. *On a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned}
\|\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1}\|_{L^\infty([0,\eta])} &\leqslant C\left(\|\left[w^\nu - w^{\nu-1}\right]\|_{L^\infty([0,\eta])} + \|\left[z^\nu - z^{\nu-1}\right]\|_{L^\infty([0,\eta])}\right) \\
\|z^{\nu+1} - z^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} &\leqslant \frac{3}{4}\left(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
\|w^{\nu+1} - w^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} &\leqslant \frac{1}{5}\left(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. 1) D'après le lemme 5.1, il existe une fonction f de classe C^{p-2} telle que :

$$\sigma^\nu = -H'(z_-^0) - \frac{1}{2}\left[z^\nu - w^\nu\right] H''(z_-^0) + \left[z^\nu - w^\nu\right]^2 f(z_-^0, \left[z^\nu - w^\nu\right])$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1} = &-\frac{1}{2} H''(z_-^0)\left(\left[z^\nu - z^{\nu-1}\right] - \left[w^\nu - w^{\nu-1}\right]\right) \\
&+ \left(\left[z^\nu - w^\nu\right]^2 - \left[z^{\nu-1} - w^{\nu-1}\right]^2\right) f(z_-^0, \left[z^\nu - w^\nu\right]) \\
&+ \left[z^{\nu-1} - w^{\nu-1}\right]^2\left(f(z_-^0, \left[z^\nu - w^\nu\right]) - f(z_-^0, \left[z^{\nu-1} - w^{\nu-1}\right])\right).
\end{aligned} \tag{12.1}$$

On utilise alors la proposition 10.2 qui majore uniformément $z^\nu - z^0$ et w^ν et on fait un développement de Taylor de la fonction f par rapport à la deuxième variable pour obtenir le résultat.

2) La fonction $z^{\nu+1} - z^\nu$ est la solution sur $\overline{\Omega}_+$ de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left\{\begin{aligned}
&\partial_t(z^{\nu+1} - z^\nu)(s,y) - \left(H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^\nu\right)\partial_y(z^{\nu+1} - z^\nu)(s,y) = \\
&\qquad \left(H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu\right)\partial_y z^\nu(s,y) \\
&(z^{\nu+1} - z^\nu)(0,y) = 0
\end{aligned}\right. \tag{12.2}$$

On intègre le long d'une caractéristique de $z^{\nu+1}$ et on obtient que :

$$\begin{aligned}
(z^{\nu+1} - z^\nu)(s,y) &= \int_0^s \left(H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu\right)\partial_y z^\nu(t, \xi(t,s,y))\, dt \\
&= \int_0^s \left(H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu\right)\partial_y\left(z^\nu - z^0\right) dt\ + \\
&\int_0^s \left(H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu\right)\partial_y z^0(t, \xi(t,s,y))\, dt
\end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Taylor et le premier point du lemme pour majorer la première intégrale :

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^s \big(H'(z^{\nu-1}-w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) + \sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu\big)\partial_y(z^\nu - z^0)(t,\xi)\,dt\,\Big| \\
&\qquad C\sqrt{s}\,\big(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\big)
\end{aligned}$$

car : $|\,\partial_y(z^\nu - z^0))(t,y)\,| \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}$. On s'intéresse alors à la deuxième intégrale. D'après (12.1), on a également :

$$|\,(\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1})(t)\,| \leqslant (\frac{1}{2}H''(z^0_-) + C\sqrt{t})\big(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty}\big)$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où : }&\Big|\int_0^s (\sigma^{\nu-1} - \sigma^\nu)\partial_y z^0(t,\xi(t,s,y))\,dt\,\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\big(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\big) \times \\
&\Big(\int_0^s |\,H''(z^0_-)\partial_y z^0(t,\xi(t,s,y))\,|\,dt + C\int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t}}\Big).
\end{aligned}$$

On introduit $H''(z^0)$ dans l'intégrale restante en utilisant une inégalité triangulaire et on conclut grâce aux lemmes 7.4 et 9.1. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^s (\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1})(t))\partial_y z^0(t,\xi(t,s,y))\,dt\,\Big| \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{3}{2}\Big)\Big(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)
\end{aligned}$$

$$\text{car : }\int_0^s |\,H''(z^0_-)\partial_y z^0(t,\xi(t,s,y))\,|\,dt \leqslant \ln\Big(\frac{3}{2}\Big) + C\sqrt{s}.$$

Pour majorer l'intégrale restante dans le calcul de $z^{\nu+1} - z^\nu$, on utilise la formule de Taylor et les estimations uniformes déjà trouvées. On obtient, alors, en regroupant les différentes majorations :

$$(z^{\nu+1} - z^\nu)(s,y) \leqslant (\frac{3}{2}\ln\Big(\frac{3}{2}\Big) + C\sqrt{s})\big(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\big).$$

On prend s assez petit pour avoir $\frac{3}{2}\ln(3/2) + C\sqrt{s} \leqslant \frac{3}{4}$ et on a démontré le deuxième point.

3) La fonction $w^{\nu+1} - w^\nu$ est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante sur $\overline{\Omega}_+$:

$$(12.3)\qquad \begin{cases}
\partial_t(w^{\nu+1} - w^\nu)(s,y) + \big(H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^\nu\big)\partial_y(w^{\nu+1} - w^\nu)(s,y) = \\
\qquad \big(H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^{\nu-1} + \sigma^\nu\big)\,\partial_y w^\nu(s,y) \\
(w^{\nu+1} - w^\nu)(0,y) = 0
\end{cases}$$

On intègre le long d'une caractéristique de $w^{\nu+1}$ et, en reprenant les notations définies en (10.4), on obtient que :

$$\begin{aligned}
&(w^{\nu+1} - w^\nu)(s,y) = w_+^{\nu+1}(t) - w_+^\nu(t) + \\
&\int_t^s \big(H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu) - \sigma^{\nu-1} + \sigma^\nu\big)\,\partial_y w^\nu(\alpha,\xi(\alpha,s,y))\,d\alpha.
\end{aligned}$$

Remarque. Si la caractéristique considérée coupe l'axe $t=0$, on prend $w_+^{\nu+1}(t) = w_+^\nu(t) = t = 0$ et le raisonnement est le même.

On utilise alors les estimations uniformes que l'on a montrées. D'après la première partie du lemme, il existe une constante C telle que, pour tout $(s,y) \in \overline{\Omega}_+$, on ait :

$$|(\sigma^\nu - \sigma^{\nu-1})(t)| \leqslant C\Big(\big|[z^\nu - z^{\nu-1}]\big| + \big|[w^\nu - w^{\nu-1}]\big|\Big). \tag{12.4}$$

La formule de Taylor-Lagrange nous permet de majorer le reste de l'intégrale de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^s \big(H'(z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) - H'(z^\nu - w^\nu)\big)\, \partial_y w^\nu(s,\xi(t,s,y))\, dt\,\Big| \\
&\leqslant C_2\left(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\int_0^s |\,\partial_y w^\nu(t,\xi(t,s,y))\,|\, dt \\
&\leqslant C_2\, N'\, s^{\frac{3}{2}}\left(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \text{car } |\,\partial_y w^\nu(t,y)\,| \leqslant N'\sqrt{t}
\end{aligned}$$

où la constante C_2 a été définie en (11.1) et représente une majoration de H''. On a également :

$$\begin{cases} w_+^{\nu+1}(t) = W\big(z_+^{\nu+1}(t), z_-^{\nu+1}(t)\big)\,[z^{\nu+1}]^3 \quad \text{d'où :} \\ |\,w_+^{\nu+1}(t) - w_+^\nu(t)\,| \leqslant C\,t\,\|z^{\nu+1} - z^\nu\|_{L^\infty} \quad \text{car} \quad [z^{\nu+1}] = O(\sqrt{t}) \end{cases}$$

On regroupe les estimations précédentes et on obtient :

$$\begin{aligned}
|(w^{\nu+1} - w^\nu)(s,y)| \leqslant{}& C\, s\, \|z^{\nu+1} - z^\nu\|_{L^\infty} \\
&+ C_2\, N'\, s^{\frac{3}{2}}\left(\|w^\nu - w^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z^\nu - z^{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

On prend alors s assez petit et on utilise le point précédent pour démontrer le résultat □

Le lemme 12.1 permet de montrer la :

Proposition 12.1. *Les suites de fonctions $(w^\nu)_\nu, (z^\nu)_\nu$ et $(\sigma^\nu)_\nu$ convergent uniformément vers des fonctions w, z et σ solutions du système (6.3). De plus, les fonctions z et w admettent un choc en $y=0$. Elles sont continues sur Ω_- et Ω_+ et vérifient les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned}
|\,(z - z^0)(s,y)\,| &\leqslant M\,s \\
|\,w(s,y)\,| &\leqslant N\,s^{\frac{3}{2}} \\
|\,(\sigma - \sigma^0)(s)\,| &\leqslant P\,s
\end{aligned}$$

On a également les relations de Rankine-Hugoniot suivantes :

$$\begin{cases} \sigma = -\sqrt{\dfrac{[H(z-w)]}{[G(z-w)]}} \\ [z+w]^2 = [H(z-w)]\,[G(z-w)] \end{cases}$$

Preuve. La convergence uniforme des suites de fonctions $(w^\nu)_\nu$ et $(z^\nu)_\nu$ impliquent tous les autres résultats. On va donc montrer que ces suites sont des suites de Cauchy pour la norme $L^\infty(\Omega)$.

On pose :

$$\begin{cases} x^{\nu+1} = \|z^{\nu+1} - z^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \\ y^{\nu+1} = \|w^{\nu+1} - w^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \end{cases}$$

D'après le lemme 12.1, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} x^{\nu+1} \leqslant \dfrac{3}{4}(x^\nu + y^\nu) \\ y^{\nu+1} \leqslant \dfrac{1}{5}(x^\nu + y^\nu) \end{cases}$$

On vérifie grâce à ces deux relations que les suites $(x^\nu)_\nu$ et $(y^\nu)_\nu$ sont majorées par des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 et on a alors la convergence uniforme des suites de fonctions $(w^\nu)_\nu$ et $(z^\nu)_\nu$. Ce résultat nous permet de passer à la limite dans le schéma itératif car on a également des estimations uniformes sur les dérivées partielles de z^ν et w^ν et la convergence uniforme des suites de fonctions $(w^\nu)_\nu$ et $(z^\nu)_\nu$ implique que les suites de fonctions $(\partial_y w^\nu)_\nu$ et $(\partial_y z^\nu)_\nu$ convergent faiblement vers $\partial_y w$ et $\partial_y z$. La convergence étant uniforme, w et z vérifient également les estimations sur les suites $(w^\nu)_\nu$ et $(z^\nu)_\nu$ montrées dans la proposition 10.2 □

13. Preuve des lemmes.

On regroupe dans ce paragraphe les lemmes qui n'ont pas été démontrés précédemment. Les trois premiers sont fondamentaux pour la preuve de l'uniformité des estimations obtenues, les autres sont essentiellement techniques.

13.1 Preuve du lemme 7.1.

L'égalité (7.9) appliquée à $t = s$ donne :

$$y + \alpha(s+1) + \varphi^0(s) = \xi_0 + (s+1)g(\xi_0).$$

On prend $0 \leqslant t \leqslant s$ et on fait la différence des deux égalités précédentes ; on obtient :

$$\begin{aligned} y - \xi(t,s,y) &= \big(g(\xi_0) - \alpha\big)(s-t) + \varphi^0(t) - \varphi^0(s) \\ &= \big(g(\xi_0) - g(0)\big)(s-t) + O(s^2 - t^2) \\ &\qquad \text{car } \varphi^0(t) = c'\,t^2 + o(t^2) \quad \text{et} \quad t \leqslant s \\ &= -\xi_0(s-t) + O\big(s\,(s-t) + \xi_0^3\,(s-t)\big) \end{aligned} \tag{13.1.1}$$

d'après l'hypothèse (2.12) faite sur la fonction g.

On reprend la fonction y_+ définie en (2.7) mais calculée dans les nouvelles variables qui redressent le choc, ce qui nous permet d'écrire :

$$\xi_0 = y_+(s,y). \tag{13.1.2}$$

On va alors utiliser les estimations montrées sur cette fonction. L'inégalité (4.3) nous donne :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant y_+^3(s,y) &\leqslant c\left((s)^3 + (y + \alpha(s+1) + \varphi^0(s) - x_0)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C\left(s^{\frac{3}{2}} + y + \alpha s + \varphi^0(s)\right). \end{aligned}$$

car $x_0 = \alpha$. On a donc :

$$\xi_0^3(s-t) = O\big(s\,(s-t) + y(s-t)\big).$$

car $t \geqslant 0$ et $\varphi^0(s) = O(s^2)$. L'égalité (7.9) devient alors :

$$\xi(t,s,y) - y = \xi_0(s-t) + O\big(s\,(s-t)\,(1+y)\big) \tag{13.1.3}$$

On a vu dans le lemme 3.5 que :

$$y_+(s,0) = \sqrt{s} + O(s). \tag{13.1.4}$$

Regardons alors le cas où $y > 0$. La fonction y_+ est de classe C^p sur $\overline{\Omega}_+ \setminus (0,0)$, on écrit alors la formule de Taylor :

$$y_+(s,y) = y_+(s,0) + y\,\partial_y y_+(s,\theta y) \quad \text{avec} \quad \theta \in]0,1[$$

or la fonction $(\theta, s, y) \to y^{\frac{2}{3}}\partial_y y_+(s,\theta y)$ est uniformément bornée sur le compact $[0,1] \times \overline{\Omega}_+$; en effet, d'après l'identité (4.7) et l'inégalité (4.8), on a :

$$0 \leqslant y^{\frac{2}{3}}\partial_y y_+(s,\theta y) \leqslant C\frac{y^{\frac{2}{3}}}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{3}}} \leqslant C$$

donc $\xi_0 = \sqrt{s} + O(s + y^{\frac{1}{3}})$. On reporte cette égalité dans (13.1.3) et on obtient :

$$\xi(t,s,y) - y = \sqrt{s}\,(s-t) + O\big(s\,(s-t) + y^{\frac{1}{3}}\,(s-t) + y\,(s-t)\big).$$

On suppose alors ε assez petit pour avoir $y < y^{\frac{1}{3}}$ et $(s-t)^2 < s-t$; on a alors $y\,(s-t)^2 < y^{\frac{1}{3}}\,(s-t)$ et on a démontré le lemme.

13.2 Preuve du lemme 7.2.

z^0 étant constant le long d'une caractéristique, on a l'égalité suivante : $z^0(t,\xi(t,s,y)) = z^0(s,y) = z_0(\xi_0)$ d'où, d'après (7.9) :

$$\partial_y z^0(t,\xi(t,s,y)) = \frac{z_0'(\xi_0)}{1+(t+1)g'(\xi_0)}. \tag{13.2.1}$$

On en déduit alors que :

$$I = \int_0^s \frac{g'(\xi_0)}{1+(t+1)g'(\xi_0)}\,dt = \ln\Big(\frac{1+(s+1)g'(\xi_0)}{1+g'(\xi_0)}\Big). \tag{13.2.2}$$

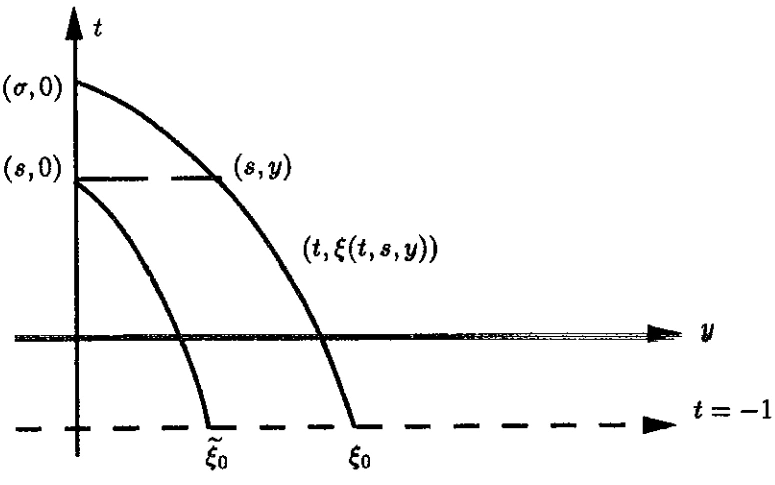

FIG. 13.2

On a vu que le pied d'une caractéristique ξ_0 est une fonction croissante de la variable d'espace y. D'après les hypothèses (2.12), la fonction g' est croissante sur $[0,\varepsilon]$. On en déduit que la fonction :

$$y \longrightarrow -\ln\Big(\frac{1+(1+s)\,g'(\xi_0)}{1+g'(\xi_0)}\Big)$$

est décroissante.

On considère alors la caractéristique de z^0 qui passe par le point $(s,0)$ et on note $\widetilde{\xi}_0$ son pied (voir fig. 13.2) ; on a alors d'après ce qui précéde :

$$-\ln\Big(\frac{1+(1+s)\,g'(\xi_0)}{1+g'(\xi_0)}\Big) \leqslant -\ln\Big(\frac{1+(1+s)\,g'(\widetilde{\xi}_0)}{1+g'(\widetilde{\xi}_0)}\Big) \tag{13.2.3}$$

D'après le lemme 3.5 et la proposition 3.1 donnant les régularités de la courbe de choc et du pied de la caractéristique, $\widetilde{\xi}_0$ est une fonction régulière de la variable $\sqrt{s}$, donc il existe une constante c_1 telle que :

$$\widetilde{\xi}_0 = \sqrt{s} + c_1\, s + o(s).$$

On peut alors faire un développement limité des fonctions suivantes en utilisant l'hypothèse (2.12) faite sur la fonction g et ses dérivées :

$$1 + g'(\widetilde{\xi}_0) = 1 + (-1 + 2g^{(3)}(0)\,\widetilde{\xi}_0^2 + \widetilde{O}(s^{\frac{3}{2}})) = 3\,s + \widetilde{O}(s^{\frac{3}{2}}).$$

$$\begin{aligned} 1+(s+1)\,g'(\widetilde{\xi}_0) &= 1+(s+1)\big(-1+3\,s+\widetilde{O}(s^{\frac{3}{2}})\big) = -s+3\,s+\widetilde{O}(s^{\frac{3}{2}}) \\ &= 2\,s + \widetilde{O}(s^{\frac{3}{2}}) \end{aligned} \tag{13.2.4}$$

avec $\widetilde{O}$ défini par :

$$f = \widetilde{O}(g) \quad \Leftrightarrow \quad \exists C > 0 \qquad \frac{1}{C}\,g \leqslant f \leqslant C\,g.$$

On a donc :

$$\ln\Big(\frac{1+(s+1)\,g'(\widetilde{\xi}_0)}{1+g'(\widetilde{\xi}_0)}\Big) = \ln\Big(\frac{2\,s+\widetilde{O}(s^{\frac{3}{2}})}{3\,s+\widetilde{O}(s^{\frac{3}{2}})}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{3}\,(1+\widetilde{O}(\sqrt{s})\Big)$$

On obtient, alors, en reportant ce résultat dans (13.2.2) et en utilisant (13.2.3) :

$$-I \leqslant \ln\Big(\frac{3}{2}\Big) + c\sqrt{s}. \tag{13.2.5}$$

Pour prouver la deuxième partie, on vérifie que la fonction à intégrer garde un signe constant. En effet, elle est égale à : $\dfrac{g'(\xi_0)}{1+(t+1)g'(\xi_0)}$, or , d'après l'estimation $\xi_0 = \sqrt{s} + O(s + y^{\frac{1}{3}})$, si s et y sont assez petits, ξ_0 l'est aussi et pour ξ_0 assez petit, on a $g'(\xi_0) < 0$ et :

$$1 + (t+1)g'(\xi_0) > 1 + (s+1)g'(\xi_0) \text{ car } t \leqslant s$$

or $1 + (s+1)g'(\xi_0) > 0$ d'après le calcul (13.2.4). On a alors $I < 0$ et l'inégalité (13.2.5) prouve le premier point du lemme.

13.3 Preuve du lemme 7.3.

On note ξ_0 (respectivement ζ_0) le pied de la caractéristique de z^0 qui passe par $(t, \xi(t,s,y))$ (resp. $(t, \zeta(t,s,y))$). Ces deux caractéristiques sont représentées sur la figure 13.3. On utilise l'identité (13.2.1) pour exprimer $\partial_y\big(H'(z^0)\big)$ en fonction du pied de la caractéristique ; on fait le rapport des deux expressions obtenues et on a :

$$\Big|\frac{\partial_y\big(H'(z^0)\big)(t,\xi(t,s,y))}{\partial_y\big(H'(z^0)\big)(t,\zeta(t,s,y))}\Big| = \Big|\frac{g'(\xi_0)}{g'(\zeta_0)}\Big| \times \Big|\frac{1+(1+t)g'(\zeta_0)}{1+(1+t)g'(\xi_0)}\Big|. \tag{13.3.1}$$

Montrons que l'hypothèse (7.10) entraîne :

$$\xi_0 - \zeta_0 = O\big((s-t)\big) = O(s). \tag{13.3.2}$$

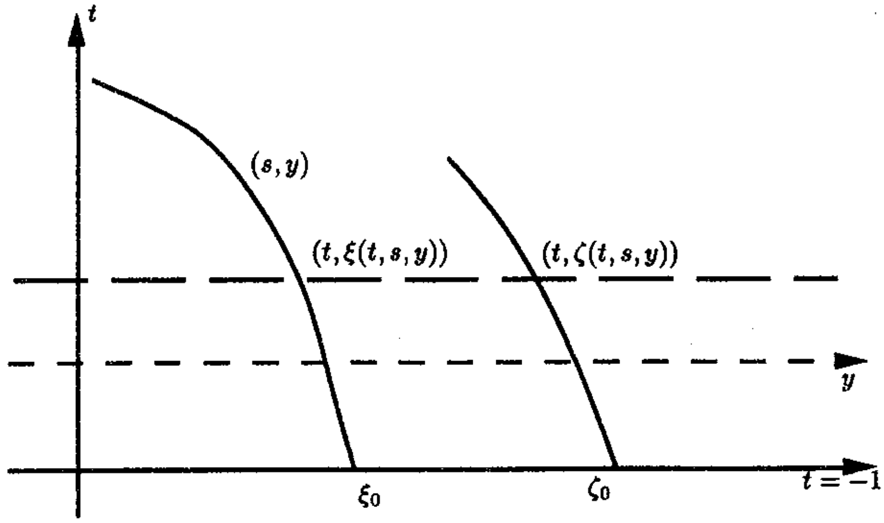

FIG. 13.3

On reprend les équations sous forme intégrale des deux caractéristiques :

$$\begin{cases} \xi(t,s,y)+\alpha(t+1)+\varphi^0(t)=\xi_0+(t+1)g(\xi_0) \\ \zeta(t,s,y)+\alpha(t+1)+\varphi^0(t)=\zeta_0+(t+1)g(\zeta_0) \end{cases}$$

En faisant la différence , on obtient :

$$\xi_0-\zeta_0+(t+1)(g(\xi_0)-g(\zeta_0))=\xi(t,s,y)-\zeta(t,s,y)=(s-t)\psi(t,s,y)$$

où ψ est une fonction bornée en t d'après l'hypothèse (7.10). On pose :

$$u(t)=\frac{\xi_0-\zeta_0}{s-t}$$

pour ξ_0, s et y fixés. On a alors $u(s)=1$ et :

$$F(t,u)=u+(1+t)\left(\frac{g(\xi_0)-g(\xi_0-(s-t)u)}{s-t}\right)-\psi(t,s,y)=0.$$

On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites pour montrer que u est bornée en t. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \partial_u F(t,u) &= 1+(1+t)\,g'(\xi_0-(s-t)u) \\ &= 1+(1+t)\,g'(\zeta_0) \end{aligned}$$

Donc $\partial_u F(t,u)>0$, d'après (13.2.3) pour ξ_0 et s assez petits. On a donc l'estimation (13.3.2) car $s-t=O(s)$.

Cette estimation nous donne immédiatement que :

$$\frac{g'(\zeta_0)}{g'(\xi_0)}=1+O((s)) \tag{13.3.3}$$

De plus, on a :

$$\frac{1+(t+1)g'(\zeta_0)}{1+(t+1)g'(\xi_0)}=1+(t+1)\,\frac{g'(\zeta_0)-g'(\xi_0)}{1+(t+1)g'(\xi_0)}.$$

On définit le temps σ par $\xi(\sigma, s, y) = 0$ et on utilise le fait que ξ_0 est une fonction régulière de la variable $\sqrt{\sigma}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 1+(t+1)g'(\xi_0) &= -t + 3\sigma + \widetilde{O}(\sigma^{\frac{3}{2}}) = \widetilde{O}(\sigma) \text{ car } t \leqslant s \leqslant \sigma \text{ et} \\ g'(\zeta_0) - g'(\xi_0) &= (\zeta_0 - \xi_0) g''(\xi_0) + 0(s^2) \quad \text{d'après (13.3.1)} \\ &= (\zeta_0 - \xi_0)\, \xi_0\, g^{(3)}(0) + 0(s^2 + \sigma^2) \text{ car } \xi_0 = O(\sqrt{\sigma}) \\ &= O(s\sqrt{\sigma}). \end{aligned}$$

d'où :
$$\frac{g'(\zeta_0) - g'(\xi_0)}{1+(t+1)g'(\xi_0)} = \frac{O(s\sqrt{\sigma})}{\widetilde{O}(\sigma)} = \frac{O(s)}{\widetilde{O}(\sqrt{\sigma})} = O(\sqrt{s}) \text{ car } s \leqslant \sigma.$$

On obtient alors :

$$\frac{1+tg'(\zeta_0)}{1+tg'(\xi_0)} = 1 + 0(\sqrt{s}). \tag{13.3.4}$$

Les estimations (13.3.3) et (13.3.4) prouvent alors le lemme □

13.4 Preuve du lemme 9.1.

ξ^0 est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi^0}{\partial t}(t,s,y) = -H'(z^0)(t, \xi^0(t,s,y)) - \sigma^0(t) \\ \xi^0(s,s,y) = y \end{cases} \tag{13.4.1}$$

et $\xi^{\nu+1}$ est solution de l'équation différentielle (9.3).

On considère le schéma suivant :

$$\begin{cases} y - \xi_{n+1}(t,s,y) = -\displaystyle\int_t^s \left(H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha,s,y)) + \sigma^\nu(\alpha)\right) d\alpha \\ \qquad \xi_0(t,s,y) = \xi^0(t,s,y) \end{cases} \tag{13.4.2}$$

On note :

$$C_2 = \underset{x \in \overline{\Omega};\theta \in [0,1]}{\mathrm{Max}} \mid H''(z^0(x) + \theta(z^\nu - z^0 - w^\nu)(x)) \mid. \tag{13.4.3}$$

et on fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$$(H.R.) \qquad \mid \xi_n(t,s,y) - \xi_0(t,s,y) \mid \leqslant Rs\,(s-t)$$

avec

$$R = 3\,(P + C_2\, M). \tag{13.4.4}$$

En intégrant l'équation (13.4.1) et en retranchant le résultat obtenu à (13.4.2), on obtient que :

$$\begin{aligned} \mid \xi_{n+1}(t,s,y) - \xi_0(t,s,y) \mid \leqslant \int_t^s &\mid \sigma^\nu(\alpha) - \sigma^0(\alpha) \mid \\ &+ \mid H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha,s,y)) - H'(z^0)(\alpha, \xi_0(\alpha,s,y)) \mid d\alpha. \end{aligned}$$

D'après la proposition 8.1, on peut majorer le premier terme de la manière suivante :

$$\int_t^s \mid \sigma^\nu(\alpha) - \sigma^0(\alpha) \mid d\alpha \leqslant \int_t^s P\alpha\, d\alpha \leqslant P\, s\,(s-t).$$

Pour majorer le deuxième terme, on utilise une inégalité triangulaire :

$$\int_t^s |H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha,s,y)) - H'(z^0)(\alpha,\xi_0(\alpha,s,y))|\,d\alpha \leqslant$$
$$\int_t^s |H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha,s,y)) - H'(z^0)(\alpha,\xi_n(\alpha,s,y))|\,d\alpha$$
$$+ \int_t^s |H'(z^0)(\alpha, \xi_n(\alpha,s,y)) - H'(z^0)(\alpha,\xi_0(\alpha,s,y))|\,d\alpha$$

Les hypothèse (8.1) et (8.2) et la formule de Taylor permettent d'obtenir la majoration suivante où C_2 a été défini en (13.4.3) :

$$\int_t^s |H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha,s,x)) - H'(z^0)(\alpha,\xi_n(\alpha,s,x))|\,d\alpha$$
$$\leqslant \int_t^s |(z^\nu - z^0 - w^\nu)H''(z^0 + \theta(z^\nu - z^0 - w^\nu))(\alpha,\xi_n(\alpha,s,x))|\,d\alpha$$
$$\leqslant C_2\,(Ms + Ns^{\frac{3}{2}}) \int_t^s d\alpha \text{ d'après les hypothèses faites sur } z^\nu - z^0 \text{ et } w^\nu$$
$$\leqslant C_2\,(M + N\sqrt{s})\,s\,(s-t)$$

On utilise également la formule de Taylor-Lagrange sur le terme restant et on a alors :

$$\int_t^s \left| H'(z^0)(\alpha, \xi_n(\alpha,s,y)) - H'(z^0)(\alpha,\xi_0(\alpha,s,y)) \right| d\alpha$$
$$= \int_t^s \left| (\xi_n - \xi_0)\,\partial_y(H'(z^0))(\alpha, (\xi_0 + \theta(\xi_n - \xi_0))(\alpha,s,y)) \right| d\alpha$$
$$\leqslant R\,s\,(s-t) \int_t^s \left| \partial_y(H'(z^0))(\alpha, (\xi_0 + \theta(\xi_n - \xi_0))(\alpha,s,y)) \right| d\alpha$$

d'après l'hypothèse de récurrence (H.R.)

$$\leqslant (\ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\sqrt{s})\,R\,s\,(s-t) \text{ d'après le lemme 7.4 et pour } s \text{ assez petit.}$$

On obtient donc en regroupant les trois inégalités précédentes :

$$|\xi_{n+1}(t,s,y) - \xi_0(t,s,y)| \leqslant \left(P + C_2(M + N\sqrt{s}) + R\ln\left(\frac{3}{2}\right)(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\sqrt{s})\right) s\,(s-t)$$
$$\leqslant (\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{3}{2}\right))\,R\,s\,(s-t) + Cs^{\frac{3}{2}}(s-t)$$
$$\leqslant \frac{5}{6}\,R\,s\,(s-t) + Cs^{\frac{3}{2}}(s-t)$$

où C est une constante indépendante de s. On a également utilisé le fait que $\ln(3/2) < 1/2$. On prend donc s assez petit et on a démontré l'hypothèse de récurrence.

On va maintenant montrer que la suite $(\xi_n)_n$ converge vers la fonction $\xi^{\nu+1}$ solution de l'équation différentielle (9.3) en vérifiant que cette suite est une suite de Cauchy.

$$|\xi_{n+1}(t,s,y) - \xi_n(t,s,y)|$$
$$= \int_t^s \left| H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha, \xi_n(\alpha,s,y)) - H'(z^\nu - w^\nu)(\alpha,\xi_{n-1}(\alpha,s,y)) \right| d\alpha$$
$$\leqslant \int_t^s \left| (\xi_n - \xi_{n-1})\,\partial_y(H'(z^\nu - w^\nu))(\alpha, (\xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}))(\alpha,s,y)) \right| d\alpha$$
$$\leqslant \|\xi_n - \xi_{n-1}\|_{L^\infty(0,s)} \int_0^s \left| \partial_y(H'(z^\nu - w^\nu))(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1})) \right| d\alpha$$

On majore l'intégrale en utilisant des inégalités triangulaires :

$$\int_0^s \left|\partial_y\big(H'(z^\nu - w^\nu)\big)\big(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1})\big)\right| d\alpha \leqslant$$
$$\int_0^s \left|\big(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)\big)\, \partial_y(z^\nu - w^\nu)\big((\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1})\big)\right| d\alpha$$
$$+ \int_0^s \left|H''(z^0)\partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)\big(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1})\big)\right| d\alpha$$
$$+ \int_0^s \left|H''(z^0)\partial_y z^0\big(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1})\big)\right| d\alpha$$

Pour majorer la première intégrale, on utilise la formule de Taylor sur le terme $H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)$ et on sait que :

$$\begin{cases} (z^\nu - z^0 - w^\nu)(s,y) = O(s) \\ \partial_y(z^\nu - w^\nu)(s,y) = O(\frac{1}{s}). \end{cases}$$

Elle se majore donc par $C_1\, s$.

Pour la deuxième, on a supposé que :

$$\partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)(s,y) = O(\frac{1}{\sqrt{s}})$$

donc elle se majore, après intégration, par $C_2\sqrt{s}$.

Pour majorer la troisième, on va utiliser le lemme 7.4. En effet, on a :

$$\begin{aligned} |\,\xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1}) - \xi_0\,| &= |\,(1-\theta)(\xi_{n-1} - \xi_0) + \theta\,(\xi_n - \xi_0)\,| \\ &\leqslant (1-\theta)|\,\xi_{n-1} - \xi_0\,| + \theta\,|\,\xi_n - \xi_0\,| \\ &\leqslant R\,s\,(s-t) \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence que l'on a démontré.

On peut donc appliquer le lemme 7.4 car ξ_0 est une caractéristique de z^0, ce qui nous donne :

$$\int_0^s |\,(\partial H'(z^0))\big(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1})\big)\,|\, d\alpha \leqslant \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\sqrt{s}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} &\int_0^s \left|\partial_y\big(H'(z^\nu - w^\nu)\big)\big(\alpha, \xi_{n-1} + \theta(\xi_n - \xi_{n-1})\big)\right| d\alpha \\ &\leqslant C_2\sqrt{s} + C_1\, s + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\sqrt{s} \leqslant \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\sqrt{s} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \quad \text{si } s \text{ est assez petit.} \end{aligned}$$

La suite $(\xi_n)_n$ vérifie donc :

$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\|_{L^\infty(0,s)} \leqslant \frac{1}{2}\|\xi_n - \xi_{n-1}\|_{L^\infty(0,s)} \leqslant (\frac{1}{2})^n\|\xi_1 - \xi_0\|_{L^\infty(0,s)}$$

Il est alors facile de montrer que $(\xi_n)_n$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers une fonction ξ qui vérifie (13.4.2) or $\xi^{\nu+1}$ est l'unique solution de cette équation et on a donc :

$$|\,\xi^{\nu+1}(t,s,y) - \xi^0(t,s,y)\,| \leqslant R\,s\,(s-t).$$

13.5 Preuve du lemme 11.1.

On note $t \to \xi^0(t,s,y)$ la caractéristique de la fonction z^0 qui passe par le point (s,y) de Ω_+. On a vu, dans le lemme 7.1, qu'une caractéristique de z^0 vérifie :

$$\xi^0(t,s,y) - y = \sqrt{s}\,(s-t) + O\big(s\,(s-t) + y^{\frac{1}{3}}\,(s-t)\big)$$

donc, en particulier, pour la caractéristique $\xi^0(t,s,0)$ qui passe par le point $(s,0)$, on a : $\xi^0(t,s,0) = \sqrt{s}\,(s-t) + O\big(s\,(s-t)\big)$ d'où : $\xi^0(t,s,0) \geqslant \sqrt{s}\,(s-t) - C\,s\,(s-t)$. Montrons alors que : $y - \xi^0(t,s,y) \leqslant -\xi^0(t,s,0)$. En effet, par définition des caractéristiques de z^0, on a :

$$y - \xi^0(t,s,y) = -\int_t^s \Big(H'(z^0)(\alpha,\xi^0(\alpha,s,y)) + \sigma^0(\alpha)\Big)\,d\alpha$$

or la fonction $y \longrightarrow \xi^0(t,s,y)$ est croissante. On a également vu dans le paragraphe (13.3) que la fonction $-\partial_y\big(H'(z^0)\big)$ est négative ; on en déduit que $y \longrightarrow -H'(z^0)\big(t,\xi^0(t,s,y)\big)$ est décroissante, d'où :

$$\begin{aligned} y - \xi^0(t,s,y) &= -\int_t^s \Big(H'(z^0)(\alpha,\xi^0(\alpha,s,y)) + \sigma^0(\alpha)\Big)\,d\alpha \\ &\leqslant -\int_t^s \Big(H'(z^0)(\alpha,\xi^0(\alpha,s,0)) + \sigma^0(\alpha)\Big)\,d\alpha \leqslant 0 - \xi^0(t,s,0) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\xi^0(t,s,y) \geqslant y + \xi^0(t,s,0) \geqslant y + \sqrt{s}\,(s-t) - C\,s\,(s-t)$$

Or, d'après le lemme 9.1, on a l'inégamité suivante :

$$\begin{aligned} &|\,\xi(t,s,y) - \xi^0(t,s,y)\,| \leqslant R\,s\,(s-t) \quad \text{d'où :} \\ &\xi(t,s,y) \geqslant \xi^0(t,s,y) - R\,s\,(s-t) \\ &\qquad\qquad \geqslant y + \sqrt{s}\,(s-t)\big(1 - (C+R)\sqrt{s}\big). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour s et y assez petits, on a :

$$\xi(t,s,y) \geqslant y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{s}\,(s-t) \quad \text{pour} \quad t \in [0,s]. \tag{13.5.1}$$

Remarque. La constante est prise égale à $\sqrt{3}/2$ de manière arbitraire ; on aurait pu prendre n'importe quel réel positif et strictement plus petit que 1.

On a $y \geqslant 0$ et $s \geqslant t$ donc :

$$\begin{aligned} \xi^2 &\geqslant y^2 + \frac{3}{4}\,s\,(s-t)^2 \qquad \text{et} \\ t^3 + \xi^2 &\geqslant y^2 + \frac{3}{4}\,s\,(s-t)^2 + t^3. \end{aligned}$$

On étudie alors la fonction f définie par :

$$f : \begin{cases} [0,s] \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto \dfrac{3}{4}\,s\,(s-t)^2 + t^3 \end{cases}$$

et on montre que $f(t) \geqslant f(s/2) \geqslant \dfrac{5}{16}\,s^3$. On a donc :

$$t^3 + \xi^2 \geqslant \frac{5}{16}\,s^3 + y^2 \geqslant \frac{5}{16}\,(y^2 + t^3).$$

13.6 Preuve du lemme 11.2.

On utilise les estimations de la proposition 4.1 majorant $\partial^2_{y^2} z^0(t,y)$ par $C_0\,(t^3+y^2)^{-\frac{5}{6}}$ et celles de la proposition 10.2 majorant $z^\nu - z^0$ et w^ν respectivement par $M\,t$ et $N\,t^{\frac{3}{2}}$ ainsi que la définition de la constante C_2 donnée en (13.4.3) et on obtient :

$$\begin{aligned}
A &\leqslant C_0 \int_0^s (C_2(M\,t + N\,t^{\frac{3}{2}}) + P\,t)\frac{dt}{(t^3+\xi^2(t,s,y))^{\frac{5}{6}}}\\
&\leqslant C_0\,\frac{\beta^{\frac{5}{6}}}{(s^3+y^2)^{\frac{5}{6}}}\int_0^s (C_2(M\,t+N\,t^{\frac{3}{2}})+P\,t)\,dt \quad \text{d'après le lemme 5.1.1}\\
&\leqslant \frac{C_0\,\beta^{\frac{5}{6}}}{(s^3+y^2)^{\frac{5}{6}}}\Big((C_2\,M+P)\frac{s^2}{2}+\frac{2}{5}C_2 N s^{\frac{5}{2}}\Big) \leqslant \frac{M_0\,s^2}{(s^3+y^2)^{\frac{5}{6}}}+\frac{2}{5}\,C_0\,C_2\,N\beta^{\frac{5}{6}}\\
&\quad \text{car} \quad M_0 = \frac{1}{2}\,\beta^{\frac{5}{6}}\,C_0\,(C_2\,M+P) \quad \text{et} \quad s^{\frac{5}{2}} \leqslant (s^3+y^2)^{\frac{5}{6}}\\
&\leqslant M_0\,\frac{1}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + C \ \text{car} \ s^2 \leqslant (s^3+y^2)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

On montre de même grâce au lemme 11.1 la majoration de l'intégrale B. En effet, on a, en utilisant un développement de Taylor :

$$\begin{aligned}
B &\leqslant \int_0^s |(z^\nu - z^0 - w^\nu)H'''(z^0+\theta(z^\nu - z^0 - w^\nu))\,|(\partial_y z^0(t,\xi(t,s,y)))^2\,dt\\
&\leqslant C_3\int_0^s (M\,t+N\,t^{\frac{3}{2}})\frac{dt}{(t^3+\xi^2(t,s,y))^{\frac{2}{3}}}\\
&\qquad \text{avec } C_3 = \operatorname*{Max}_{x\in\overline{\Omega};\theta\in[0,1]} |\,H'''(z^0+\theta(z^\nu - z^0 - w^\nu))\,|\\
&\leqslant C_3\frac{\beta^{\frac{2}{3}}}{(s^3+y^2)^{\frac{2}{3}}}\int_0^s (M\,t+N\,t^{\frac{3}{2}})\,dt \ \text{d'après le lemme 11.1}\\
&\leqslant C_3\int_0^s (M+N\sqrt{t})\,dt \leqslant C
\end{aligned}$$

Il nous reste à estimer l'intégrale C. On utilise une inégalité triangulaire, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
C &\leqslant \int_0^s \big|\,(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0))\,\partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)\,\partial_y z^0(t,\xi(t,s,y))\,\big|\,dt\\
&\quad + \int_0^s \big|\,H''(z^0)\,\partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)\,\partial_y z^0(t,\xi(t,s,y))\,\big|\,dt
\end{aligned}$$

Pour majorer la première intégrale, on utilise la formule de Taylor et la constante C_3 définie plus haut ; on a :

$$\begin{aligned}
|\,(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0))(t,y)\,| &\leqslant C_3\,(|\,z^\nu - z^0\,| + |\,w^\nu\,|)\\
&\leqslant C_3\,(M\,t+N\,t^{\frac{3}{2}}) \ \text{d'après la proposition 10.2}
\end{aligned}$$

On a supposé :

$$|\,\partial_y(z^\nu - z^0 - w^\nu)(s,y)\,| \leqslant \frac{M'}{(t^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} + N'\sqrt{t}.$$

On a également vu que :

$$|\,\partial_y z^0(s,y)\,| \leqslant \frac{C_0}{(t^3+y^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

La première intégrale obtenue dans la majoration de C donne alors :

$$\int_0^s \left| \left(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)\right) \partial_y (z^\nu - z^0 - w^\nu)\, \partial_y z^0 \big(t, \xi(t,s,y)\big) \right| dt$$
$$\leqslant C_3\, C_0 \int_0^s (Mt + Nt^{\frac{3}{2}})\Big(\frac{M'}{(t^3+\xi^2)^{\frac{1}{6}}} + N'\sqrt{t}\Big)\frac{dt}{(t^3+\xi^2)^{\frac{1}{3}}} \leqslant C(M',N')\sqrt{s}.$$

Le lemme 11.1 nous permet de majorer l'intégrale restante :

$$\int_0^s \left| H''(z^0)\, \partial_y (z^\nu - z^0 - w^\nu)\, \partial_y z^0 \big(t, \xi(t,s,y)\big) \right| dt$$
$$\leqslant \int_0^s \left| H''(z^0)\, \partial_y z^0 \big(t, \xi(t,s,y)\big) \right| \left(\frac{M'}{(t^3 + \xi^2(t,s,y))^{\frac{1}{6}}} + N'\sqrt{t} \right) dt$$
$$\leqslant \frac{\beta^{\frac{1}{6}} M'}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} \int_0^s \left| H''(z^0)\, \partial_y z^0 \big(t, \xi(t,s,y)\big) \right| dt + C(M',N')\sqrt{s}$$
$$\leqslant \frac{\beta^{\frac{1}{6}} M'}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) + C\sqrt{s}\right)$$

d'après les lemmes 7.4 et 9.1 et avec

ξ_0 caractéristique de z^0 qui passe par (s,y)

On obtient finalement :

$$C \leqslant M' \frac{\beta^{\frac{1}{6}}}{(s^3+y^2)^{\frac{1}{6}}} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C(M',N')\sqrt{s}.$$

13.7 Preuve du lemme 11.3.

On utilise l'inégalité triangulaire pour séparer l'intégrale à majorer en trois intégrales.

$$\left| \int_0^s H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t,s,y))\, dt \right|$$
$$\leqslant \int_0^s \left| \left(H''(z^\nu - w^\nu) - H''(z^0)\right) \partial_y (z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t,s,y)) \right| dt$$
$$+ \int_0^s \left| H''(z^0) \partial_y (z^\nu - z^0 - w^\nu)(t, \xi(t,s,y)) \right| dt$$
$$+ \int_0^s \left| H''(z^0) \partial_y z^0 (t, \xi(t,s,y)) \right| dt$$

Les deux premières intégrales se majorent s par $C(M',N')\sqrt{s}$. En effet, on a :

$$\begin{cases} (z^\nu - z^0 - w^\nu)(s,y) = O(s) \\ \partial_y (z^\nu - w^\nu)(s,y) = O(\frac{1}{s}) \\ \partial_y (z^\nu - z^0 - w^\nu)(s,y) = O(\frac{1}{\sqrt{s}}) \end{cases}$$

Pour la dernière intégrale, on applique les lemmes 7.4 et 9.1 comme cela a été fait dans la preuve du lemme précédent et on obtient :

$$\left| \int_0^s H''(z^\nu - w^\nu)\, \partial_y (z^\nu - w^\nu)(t, \xi(t,s,y))\, dt \right| \leqslant \ln\left(\frac{3}{2}\right) + C(M',N')\sqrt{s}.$$

Références

[1] R.J DiPerna, *Existence in the Large for Nonlinear Hyperbolic Conservation Law*, Arch. Rat. Mech. Anal. **52** (1973), 244–257.

[2] ———, *Global Solutions to a Class of Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 1–28.

[3] ———, *Decay and Asymptotic Behavior of Solutions to Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. **60** (1975), 75–100.

[4] ———, *Uniqueness of Solutions to Hyperbolic Conservation Laws*, Ind. U. Math. J. **28** (1979), 244–257.

[5] L. Fuchs, *Gesammelte Mathematische Werke*, Berlin, vol. 1, 1904.

[6] J. Glimm, *Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1965), 697–715.

[7] J. Glimm, P.D. Lax, *Decay of Solutions of Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **101** (1970).

[8] F. John, *Formation of Singularities in One-Dimensional Non Linear Wave Propagation*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 337–405.

[9] S. Klainerman, A. Majda, *Formation of Singularities for Wave Equations Including the Nonlinear Vibrating String*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 241–263.

[10] S.N Kruzkov, *Generalized Solutions for the Cauchy Problem in the Large for Non-Linear Equations of First Order*, Soviet. Math. Dokl **10** (1969), 785–788.

[11] P.D Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **X** (1957), 537–566.

[12] ———, *Development of Singularities of Solutions of Non Linear Hyperbolic Partial Differential Equations*, J. Math. Phys. **5** (1964), 611–613.

[13] ———, *The Formation and Decay of Shock Waves*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 227–241.

[14] ———, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shocks Waves*, Conf. Board Math. Sci. 11 (1973), *SIAM*.

[15] T.P Liu, *Uniqueness of Weak Solutions of the Cauchy Problem for General 2-2 Conservation Laws*, J. Diff. Equations **20** (1976), 369–388.

[16] ———, *The Deterministic Version of the Glimm Scheme*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), 135–148.

[17] ———, *Development of Singularities in the Nonlinear Waves for Quasilinear Hyperbolic Partial Differential Equations General 2-2 Conservation Laws*, J. Diff. Equations **33** (1979), 92–111.

[18] ———, *Admissible Solutions of Hyperbolic Conservation Laws*, Memoirs of the A.M.S 30 (1981), 240.

[19] A. Majda, *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, Springer-Verlag, N.Y.

[20] T. Nishida, J. Smoller, *Solutions in the Large for some Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 183–200.

[21] O. Oleinik, *Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations*, Usp. Mat. Nauk 12 (1957), 3–73; English trans. in Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2 **26**, 95–172.

[22] ———, *On the Uniqueness of the Generalized Solution of the Cauchy Problem for a Nonlinear System of Equations Occuring in Mechanics*, Usp. Mat. Nauk **12** (1957), 169–176. (Russian)

[23] ———, *Uniqueness and a Stability of the Generalized Solution of the Cauchy Problem far a Quasilinear Equation*, Usp. Mat. Nauk **14** (1959), 165–170; English trans. in Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2 **33** (1964), 285– 290.

[24] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, N.Y., 1983.

[25] H. Whitney, *Differentiable Even Functions*, Duke Math. J. **10** (1948), 159–160.