Université de Rennes I
UFR Mathématiques

Licence pluridisciplinaire
UE AMNU
Année 2000-2001

Corrigé succinct de l'examen du 6 juin 2001

Exercice n°1

1) L'application f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que produit et composée de fonctions continues. Soit $(x,y) \neq (0,0)$, alors

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| &\leq |xy| \text{ car la fonction } \sin \text{ est bornée par 1} \\ &\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\big\|(x,y)-(0,0)\big\|_2^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

2) On a, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, d'après ce qui précéde

$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\big\|(x,y)-(0,0)\big\|_2} \leq \frac{1}{2}\big\|(x,y)-(0,0)\big\|_2.$$

On en déduit que f est différentiable en $(0,0)$ et sa différentielle en $(0,0)$ est l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
L'application f admet alors des dérivées partielles d'ordre 1 et on a

$$df_{(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3) Comme $f(x,y) = f(y,x)$, il suffit de montrer qu'une des deux dérivées partielles d'ordre 1 n'est pas continue en $(0,0)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{xy}{2(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

On a, d'une part,

$$\left|y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq |y| \leq \big\|(x,y)-(0,0)\big\|_\infty \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, posons

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{xy}{2(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \text{ alors,} \\ F(x,x) &= \frac{1}{2^{5/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right) \end{aligned}$$

Soit $x_k = \dfrac{1}{2\sqrt{2}k\pi}$, alors $x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F(x_k,x_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2^{5/2}} \neq 0$. On en déduit que les dérivées partielles de f ne sont pas continues en $(0,0)$.

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 2}$

L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$,, elle admet donc des dérivées premières, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3)$ sa dérivée première par rapport à la $i^{\text{ième}}$ variable pour $i = 1, 2$ ou 3 au point (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$.
L'application F est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en tant que compoée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Elle admet donc également des dérivées partielles d'ordre 1 et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) &= 2a\sin(a^2)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\cos(a^2), ab, f(a,b,a)\big) + b\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(\cos(a^2), ab, f(a,b,a)\big) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x_3}\big(\cos(a^2), ab, f(a,b,a)\big)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\cos(a^2), ab, f(a,b,a)\big) + \frac{\partial f}{\partial x_3}\big(\cos(a^2), ab, f(a,b,a)\big)\right] \\
\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) &= a\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(\cos(a^2), ab, f(a,b,a)\big) + \frac{\partial f}{\partial x_3}\big(\cos(a^2), ab, f(a,b,a)\big)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b,a).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Exercice n}^\circ 3}$

1)

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 1 & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_g(x,y,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) On peut effectuer $g \circ f$ qui est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par

$$g \circ f(x,y,z) = g(xy, yz + x, x + y + z) = (xy - yz - x, x + y + z - x^2y^2).$$

La composée $f \circ g$ n'a pas de sens.

3) Il y a deux méthodes pour donner la jacobienne de $g \circ f$.

- On la calcule directement avec la question 2 et on obtient

$$J_{g\circ f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-1 & x-z & -y \\ 1-2xy^2 & 1-2x^2y & 1 \end{pmatrix}$$

- On utilise $J_{g\circ f}(x,y,z) = J_g\big(f(x,y,z)\big) \times J_f(x,y,z)$, ce qui donne

$$J_{g\circ f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2xy & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 1 & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 & x-z & -y \\ 1-2xy^2 & 1-2x^2y & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux méthodes donnent bien sûr le même résultat.