Université de Rennes I
UFR Mathématiques

Licence pluridisciplinaire
UE AMNU
Année 2000-2001

Corrigé succinct du devoir du 4 mai 2001

Exercice n°1

1)

2-a) Notons $B = [0,1] \times [0,1]$ et $C = [1,2] \times \{0\}$. A est la réunion finie de fermés, il est donc fermé.
On a donc $A = \overline{A}$.

b) Montrons que $\overset{\circ}{A} =]0,1[\times]0,1[$.
$]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et il est inclus dans A. Montrons que c'est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ inclus dans A.
Soit $(x,y) \in A \setminus \{]0,1[\times]0,1[\}$. Montrons que A n'est pas un voisinage de (x,y). Soit $\varepsilon > 0$, alors $\mathscr{B} = B\big((x,y),\varepsilon\big)$ n'est pas incluse dans A. En effet,

- si $y = 0$ et $x \in [0,2]$, alors $(x, -\varepsilon/2) \in \mathscr{B}$ et $(-\varepsilon/2, y) \notin A$.
- si $y = 1$ et $x \in [0,1]$, alors $(x, 1+\varepsilon/2) \in \mathscr{B}$ et $(1+\varepsilon/2, y) \notin A$.
- si $y \in [0,1]$ et $x = 0$, alors $(x, -\varepsilon/2) \in \mathscr{B}$ et $(-\varepsilon/2, y) \notin A$.
- si $y \in [0,1]$ et $x = 1$, alors $(1+\varepsilon/2, y) \in \mathscr{B}$ et $(x, 1+\varepsilon/2) \notin A$.

On en déduit que $\overset{\circ}{A} =]0,1[\times]0,1[$.

Exercice n°2

1) Soit (x,y) un élément de $\mathbb{R}^2$ et $E_{(x,y)} = \{|x+ty|\,;\, t \in [0,1]\}$. L'ensemble $E_{(x,y)}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, il est non vide car il contient $|x|$ (il suffit de prendre $t = 0$.) De plus, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |x+ty| &\leq |x| + t|y| \text{ d'après l'inégalité triangulaire et } t \geq 0 \\ &\leq |x| + |y| \text{ car } t \leq 1 \end{aligned}$$

C'est donc un ensemble majoré. On en déduit qu'il admet une borne supérieure.

2) On a bien, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) \geq 0$ car $E_{(x,y)}$ est minoré par 0.

- Si $(x,y) = (0,0)$, alors, pour tout $t \in [0,1]$, $|x+ty| = 0$ et $N(x,y) = 0$.
  Si $N(x,y) = 0$, alors, pour tout $t \in [0,1]$, $|x+ty| = 0$ et donc $x+ty = 0$. On fait $t = 0$ et on obtient $x = 0$ puis $t = 1$ et on a $y = 0$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors,
  $N\big(\lambda(x,y)\big) = N(\lambda x, \lambda y) = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda x + t\lambda y| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda||x+ty|$. Or

$$|\lambda||x+ty| \leq |\lambda| N(x,y) \text{ car } |\lambda| \geq 0.$$

$\lambda N(x,y)$ est donc un majorant de $E_{\lambda(x,y)}$. D'où $N\big(\lambda(x,y)\big) \leq \lambda N(x,y)$.
De même, si $\lambda \neq 0$, alors

$$|x+ty| = \frac{1}{|\lambda|}|\lambda(x+ty)| \leq \frac{1}{|\lambda|}N\big(\lambda(x,y)\big)$$

D'où $N(x,y) \leq \dfrac{1}{|\lambda|}N\big(\lambda(x,y)\big)$.
On en déduit que $N\big(\lambda(x,y)\big) = |\lambda|N(x,y)$, cette égalité ayant déjà été prouvée pour $\lambda = 0$.

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $N\big((x,y)+(x',y')\big) \leq N(x,y)+N(x',y')$.
On a $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$ et

$$\begin{aligned} |x+x'+t(y+y')| &\leq |x+ty| + |x'+ty'| \text{ d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq N(x,y) + N(x',y') \end{aligned}$$

On en déduit que $N(x,y)+N(x',y')$ est un majorant de $E_{(x+x',y+y')}$ et donc que $N\big((x,y)+(x',y')\big) \leq N(x,y)+N(x',y')$.

On a alors montré que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

3) Soit $\varphi(t) = x + ty$, définie sur $[0,1]$, alors $\varphi'(t) = y$. On en déduit que si $y \leq 0$, l'application φ décroit de $x+y$ à x et, si $y \geq 0$, elle croit de x à $x+y$. On en déduit que $N(x,y) = \max(|x|, |x+y|)$. La boule unité de $\mathbb{R}^2$, pour la norme N, est donc

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, N(x,y) \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \max(|x|,|x+y|) \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x| \leq 1 \text{ et } |x+y| \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x| \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x+y| \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, -1 \leq x \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, -1 \leq x+y \leq 1\} \end{aligned}$$

On en déduit sa représentation graphique :