Université de Rennes 1 — Licence pluridisciplinaire
UFR Mathématiques — UE AMNU
Feuille de TP n°2 — Année 2000-2001

Méthode de dichotomie et méthode de Newton

1) Connectez-vous. Dans votre dossier `amnu`, créez un sous-dossier `TP2` et mettez-vous dedans. Ce sera l'espace de travail pour cette session.

2) Présentation rapide des deux méthodes

On considère un intervalle $[a, b]$ et une fonction f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]a, b[$.

a) La méthode de dichotomie

La méthode de dichotomie consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers la racine α de la manière suivante :

- Initialisation : on prend pour x_0 le milieu de $[a, b]$. La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles $]a, x_0[$ ou $]x_0, b[$ ou bien elle est égale à x_0.
- 1ère étape :
  - si $f(a)f(x_0) < 0$, alors $\alpha \in]a, x_0[$. On pose $a_1 = a$, $b_1 = x_0$.
  - si $f(a)f(x_0) = 0$, alors $\alpha = x_0$.
  - si $f(a)f(x_0) > 0$, alors $\alpha \in]x_0, b[$. On pose $a_1 = x_0$, $b_1 = b$.

  On prend alors pour x_1 le milieu de $[a_1, b_1]$.

On construit ainsi une suite $x_0 = (a+b)/2, x_1 = (a_1+b_1)/2, \ldots, x_0 = (a_n+b_n)/2$ telle que $|\alpha - x_n| \leq (b-a)/2^{n+1}$.

Etant donné une précision ε, cette méthode permet d'approcher α en un nombre prévisible d'itérations.

b) La méthode de Newton

On construit la suite (x_n) définie par $x_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3) Jeux de données

On travaillera avec les fonctions et intervalles suivants :

a) $\begin{cases} f_1(x) = x - e \sin x \\ [a, b] = [1, 10] \end{cases}$

b) $\begin{cases} f_2(x) = x^2 - 6x + 8 \\ [a, b] = [0, 3] \end{cases}$

c) $\begin{cases} f_3(x) = 10^{-8}x^2 - 0,8x + 10^{-8} \\ [a, b] = [-10, 120] \end{cases}$

Pour chacune de ces fonctions, créez un fichier `Fonci.m` pour $i = 1, 2, 3$ qui transforme par la fonction `Fonci` un vecteur en un vecteur de même taille en agissant composante par composante. Tracez chacune de ces fonctions. Vérifient-elles les hypothèses demandées sur les intervalles donnés ?

4) Méthode de dichotomie

a) Programmation de la méthode

Ecrire une fonction `Dichotomie.m` permettant d'appliquer cette méthode aux fonctions précédemment définies.

On prendra un test d'arrêt de la forme $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ et on prendra soin de prévoir un compteur d'itérations qui permettra d'interrompre le traitement dès que `Nmax` d'itérations sont effectuées sans que la précision ε ne soit atteinte. On pourra prendre par exemple `Nmax=100`. Les données seront a, b, ε, `Nmax` et la fonction `Fonci` ; les résultats seront la racine obtenue ainsi que son image par `Fonci` et le nombre d'itérations effectuées.

Tester sur les fonctions f_1,f_2 et f_3 pour $\varepsilon = 10^{-3}$, 10^{-6}, 10^{-9} et 10^{-12}.
Indication : regarder l'aide en ligne pour les commandes `feval` *et* `format`

b) Etude particulière de f_3

Calculer les racines de f_3 au moyen du discriminant.

On s'intéresse à la précision du calcul de la plus petite des deux racines.

Valeur trouvée : $\boxed{}$

Comparer avec les résultats obtenus précédemment pour $\varepsilon = 10^{-12}$. Expliquer l'aberration observée.

Modifier le calcul par le discriminant : garder la formule classique pour le calcul de la plus grande racine en valeur absolue et obtenir la plus petite par quotient (penser au produit des racines d'un polynôme du second degré).

Valeur trouvée : $\boxed{}$

Expliquer l'amélioration.

5) Méthode de Newton

a) Programmation de la méthode

Ecrire la fonction `Newton.m`.

On prendra un test d'arrêt de la forme $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ et on prendra soin de prévoir un compteur d'itérations qui permettra d'interrompre le traitement dès que `Nmax` d'itérations sont effectuées sans que la précision ε ne soit atteinte. On pourra prendre par exemple `Nmax=50`. Les paramètres d'entrée de la fonction `Newton` seront $x0$, ε, `Nmax`, la fonction `f` et sa dérivée `f'` ; les résultats seront la racine obtenue ainsi que son image par la fonction `f` et le nombre d'itérations effectuées.

b) Choix de la valeur initiale

- On teste cette méthode pour la fonction f_1. Ecrire la fonction `Fonc1der` qui représente la dérivée de la fonction f_1.
  On testera à chaque fois pour $\varepsilon = 10^{-3}$, 10^{-6}, 10^{-9} et 10^{-12}.
  On prendra comme valeur initiale : $x_0 = -10$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ puis $x_0 = 10$. Interpréter. Comparer avec la méthode de dichotomie.
- On teste cette méthode pour la fonction f_2. Ecrire la fonction `Fonc2der`.
  On testera à chaque fois pour $\varepsilon = 10^{-3}$, 10^{-6}, 10^{-9} et 10^{-12}.
  On prendra comme valeur initiale : $x_0 = 1$, $x_0 = 2.5$, $x_0 = 3.5$ puis $x_0 = 5$. Comparer avec la méthode de dichotomie.

c) Choix de la fonction

On va calculer la racine cubique de 3 en utilisant les deux fonctions $\texttt{Fct1}(x) = x^2 - 3/x$ et $\texttt{Fct2}(x) = x - 3/x^2$. En utilisant la méthode de Newton avec $\varepsilon = 10^{-3}$, 10^{-6}, 10^{-9} puis 10^{-12}, calculer les valeurs obtenues pour chacune de ces fonctions en prenant comme condition initiale $x_0 = 1$, $x_0 = 3$ puis $x_0 = 10$. Comparer le nombre d'itérations obtenues. Justifier.