Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche

Direction des personnels enseignants

Rapport de l'agrégation interne et CAERPA de mathématiques année 2005

Ce rapport, rédigé par des membres du jury, est publié sous la responsabilité du président du jury

Table des matières

Composition du jury

1 Composition du jury

Président

GRAMAIN	André	Professeur des universités	LYON

Vice-présidents

CAMUS	Jacques	Professeur des universités	RENNES
MARCHAL	Jeannette	IGEN	
ROSSO	Marc	Professeur des universités	PARIS VII
SKANDALIS	Georges	Professeur des universités	PARIS VII
VAN DER OORD	Eric	IGEN	

Secrétaire général

CHEVALLIER	Jean Marie	Maître de conférences	ORLEANS

Examinateurs

ADAD	René	Professeur agrégé	Lycée Militaire AIX EN PROVENCE
ALESSANDRI	Michel	Professeur de chaire supérieure	MONTPELLIER
AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	VERSAILLES
BARBOLOSI	Dominique	Maître de conférences	AIX-MARSEILLE III
BENNEQUIN	Daniel	Professeur des universités	PARIS VII
CESARO	Joseph	IA-IPR	NICE
CHMURA	Rémi	Professeur agrégé	Lycée Roosevelt REIMS
CORI	René	Maître de conférences	PARIS VII
COULET	Cyrille	Professeur de chaire supérieure	lycée F. Mistral AVIGNON
COURBON	Denise	IA-IPR	LYON
DEGUEN	Eliane	IA-IPR	RENNES
DICHI	Henri	Maître de conférences	CLERMONT-FERRAND
DUCOURTIOUX	Jean Louis	Maître de conférences	CLERMONT FERRAND
FLEURY-BARKA	Odile	Maître de conférences	REIMS
FONTAINE	Philippe	Professeur de chaire supérieure	Lycée Guez de Balzac ANGOULEME
FONTANEZ	Françoise	Professeur de chaire supérieure	Lycée Buffon Paris
GALL	Philippe	Professeur de chaire supérieure	Lycée Champollion GRENOBLE
GENAUX	Patrick	Professeur de chaire supérieure	Lycée Kléber STRASBOURG
GEORGELIN	Christine	maître de conférences	TOURS
GUELFI	Pascal	Professeur de chaire supérieure	CLERMONT-FERRAND
HENNIART	Guy	Professeur des universités	ORSAY
HENRI	Michèle	Professeur de chaire supérieure	Lycée Camille Guérin POITIERS
HIJAZI	Oussama	Professeur des universités	NANCY
LAMBRE	Thierry	Professeur des universités	CLERMONT-FERRAND
LAZAR	Boris	IA-IPR	RENNES
LE GOFF	Claire	Professeur agrégé	Université de Paris VI PARIS
LEPEZ	Catherine	Professeur Chaire supérieure	Lycée Faidherbe LILLE
LINO	Danièle	Professeur chaire supérieure	Lycée Roosevelt REIMS

LODAY-RICHAUD	Michèle	Professeur des universités	ANGERS
LODS	Véronique	Professeur agrégé	Lycée Camille Guérin POITIERS
LOSEKOOT	Anne	Professeur chaire supérieure	Lycée Bellevue TOULOUSE
MALLORDY	Jean François	Professeur agrégé	Lycée Blaise Pascal CLERMONT-FERRAND
MURAT	Christiane	Professeur chaire supérieure	Lycée Condorcet PARIS
PRADIÉ	Françoise	Professeur chaire supérieure	Lycée Gustave Eiffel BORDEAUX
RAYNAL	Martine	IA-IPR	AIX-MARSEILLE
RÉMONDIÈRE	Alain	Professeur de chaire supérieure	Lycée Joffre MONTPELLIER
RIGAL	Nicole	Maître de conférences	PARIS V
RITTAUD	Benoît	Maître de conférences	PARIS XIII
ROUSSET-BERT	Suzette	IA-IPR	STRASBOURG
ROUX	Daniel	Maître de conférences	CLERMONT-FERRAND
SCHILTZ	Dominique	Professeur de chaire supérieure	Lycée Faidherbe LILLE
SESTER	Olivier	Maître de conférences	Marne-la-Vallée
SKANDALIS	Angélique	Professeur de chaire supérieure	Lycée Janson de Sailly PARIS
SUFFRIN	Frédéric	Professeur agrégé	Lycée Kléber STRASBOURG
VENTURA	Joseph	Professeur de chaire supérieure	Lycée Dumont d'Urville TOULON
VIAL	Jean-Pierre	Professeur de chaire supérieure	Lycée Buffon PARIS
VIVIER	Laurent	Maître de conférences	IUFM NICE

Statistiques

2 Statistiques

AGRÉGATION INTERNE ET CAERPA DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2005

RÉSULTATS STATISTIQUES

Les épreuves écrites ont eu lieu les 3 et 4 février 2005, la liste d'admissibilité a été signée le 1er avril 2005 :

Agrégation interne : 311 admissibles ; CAERPA : 27 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 24 avril au 3 mai 2005, au lycée Fénelon à Paris. La liste d'admission a été signée le 4 mai 2005 :

Agrégation interne : 138 admis ; CAERPA : 12 admis.

Remarques : Comme on peut le constater sur les tableaux d'évolution des deux concours donnés ci-après, le nombre des candidats présents aux deux épreuves écrites est relativement stable par rapport à l'an passé. Le nombre de postes est stable aux deux concours.

Le calendrier prévu pour la session 2006 est le suivant :

Écrit : jeudi 2 et vendredi 3 février 2006.

Oral : non encore fixé.

Nombre de places offertes au concours en 2006 :

Agrégation interne : non encore fixé

CAERPA : non encore fixé.

Évolution des concours

AGRÉGATION INTERNE

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989	120	2951	1706	232	120+52*
1990	225	2386	1326	444	225+85*
1991	352	2575	1299	510	352+43*
1992	331	2538	1195	508	331+34*
1993	334	2446	1184	478	334+13*
1994	330	2520	1244	475	330+12*
1995	330	2211	1212	446	330
1996	246	2249	1150	441	246
1997	200	2113	1084	436	200
1998	200	2083	1071	432	200
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138

*liste supplémentaire

CAERPA

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989					
1990					
1991	13				10
1992	20	269	102	22	14
1993	40	302	128	42	25
1994	36	331	156	57	36
1995	31	340	155	53	31
1996	39	375	176	64	39
1997	32	379	181	58	32
1998	28	372	169	61	28
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12

2.1 Statistiques de l'agrégation interne 2005

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	1897	1401	311	138
Femmes	626	471	97	49
Français et U.E.	1887	1391	311	138
Union Européenne	1	1	0	0
Étrangers hors UE	10	10	0	0
Moins de 50 ans	1732	1278	297	129
Moins de 45 ans	1551	1147	281	117
Moins de 40 ans	1378	1027	266	113
Moins de 35 ans	1009	747	218	94
Moins de 30 ans	293	218	88	49

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	8	5	3	10	9	8	10	9	8
épreuve 2 (sur 20)	9	7	5	11	10	9	12	11	10
Total écrit (sur 200)	82	62	40	101	94	89	108	99	92

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	2	2	2
16	0	0	0	0	0	0	2	2	2
15	1	1	1	1	1	1	4	4	4
14	2	2	2	2	2	2	9	9	9
13	3	3	3	4	4	4	23	23	18
12	11	11	11	10	10	9	45	44	34
11	32	32	29	28	28	24	112	110	74
10	89	89	65	98	94	58	237	192	110
9	232	232	121	255	217	100	414	283	133
8	401	311	138	447	297	135	586	309	138
7	575	311	138	553	306	138	712	311	138
6	734	311	138	715	309	138	912	311	138
5	894	311	138	831	310	138	1075	311	138
4	1054	311	138	987	311	138	1206	311	138
3	1192	311	138	1110	311	138	1293	311	138
2	1295	311	138	1280	311	138	1369	311	138
1	1371	311	138	1380	311	138	1395	311	138
0	1401	311	138	1440	311	138	1415	311	138

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	12	9	7	14	12	10
épreuve 2 (sur 20)	12	9	7	14	12	10
Total général (sur 400)	214	190	168	239	218	205

le total général est ramené sur 20

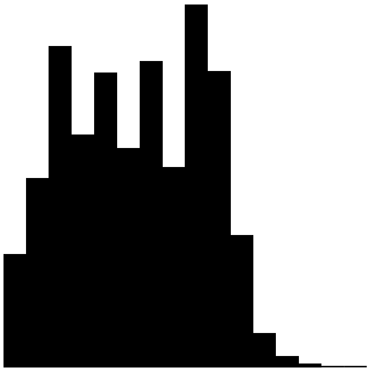
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	4	4	1	1
18	0	0	8	8	5	5
17	0	0	18	18	12	12
16	0	0	31	30	27	27
15	1	1	34	33	33	32
14	2	2	52	50	47	45
13	14	14	66	63	68	65
12	33	33	87	82	88	84
11	64	64	111	98	109	98
10	138	138	141	110	143	114
9	178	138	175	122	167	125
8	248	138	206	128	209	132
7	293	138	240	135	232	133
6	301	138	266	137	261	136
5	301	138	292	138	289	136
4	301	138	301	138	298	138
3	301	138	301	138	300	138
2	301	138	302	138	301	138
1	301	138	302	138	301	138
0	301	138	302	138	301	138

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	86	59	10	5
BESANCON	21	17	3	2
BORDEAUX	73	56	6	5
CAEN	35	24	4	2
CLERMONTFERRAND	30	21	4	2
DIJON	56	41	14	8
GRENOBLE	89	61	9	6
LILLE	150	115	27	11
LYON	82	64	21	8
MONTPELLIER	75	60	12	9
NANCY METZ	67	49	12	5
POITIERS	29	22	4	1
RENNES	42	32	5	3
STRASBOURG	70	49	20	5
TOULOUSE	73	46	10	8
NANTES	58	38	9	2
ORLEANS TOURS	56	41	8	4
REIMS	42	28	5	2
AMIENS	67	54	18	5
ROUEN	66	54	14	4
LIMOGES	19	17	1	0
NICE	85	57	15	6
CORSE	11	8	2	1
REUNION	66	50	3	1
MARTINIQUE	27	18	1	1
GUADELOUPE	31	24	6	4
GUYANNE	13	12	2	0
PARIS/CRET/VERS	378	284	66	28

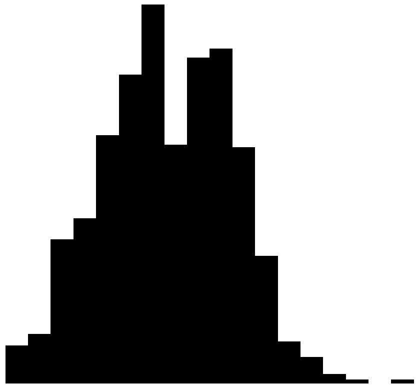
Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	42	22	3	0
ENSEIGNANT SUP	23	11	3	2
ENS.FPE.TIT	48	37	5	2
AG FPE	24	12	3	2
CERTIFIE	1656	1254	289	131
PLP	104	65	8	1

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	1	1	1	0
ENS.TIT.MEN	1820	1349	301	134
AG.FONC.PUB.ETA	76	51	9	4

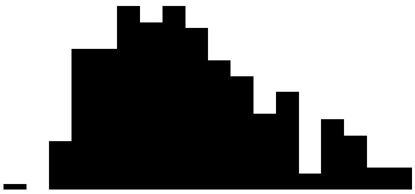
Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	23	13	1	0
AIX	86	59	10	5
AJACCIO	11	8	2	1
AMIENS	67	54	18	5
BESANCON	21	17	3	2
BORDEAUX	51	41	5	4
CAEN	35	24	4	2
CLERMONT FERRAN	30	21	4	2
DIJON	44	36	13	8
GRENOBLE	89	61	9	6
LILLE	142	109	26	11
LIMOGES	19	17	1	0
LYON	80	63	21	8
MONTPELLIER	75	60	12	9
NANCY	67	49	12	5
NANTES	58	38	9	2
NICE	83	55	15	6
ORLEANS	56	41	8	4
PARIS	378	284	66	28
PAU	22	15	1	1
POITIERS	28	21	4	1
REIMS	42	28	5	2
RENNES	42	32	5	3
ROUEN	66	54	14	4
STRASBOURG	70	49	20	5
TOULOUSE	73	46	10	8
CAYENNE	13	12	2	0
FORT DE FRANCE	27	18	1	1
PAPEETE	8	6	1	0
POINTE A PITRE	31	24	6	4
SAINT DENIS REU	60	46	3	1



Écrit 1



Écrit 2



Oral 1

Oral 2

2.2 Statistiques du CAERPA 2005

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	297	211	27	12
Femmes	116	86	8	4
Moins de 50 ans	262	190	27	12
Moins de 45 ans	219	162	27	12
Moins de 40 ans	186	136	25	10
Moins de 35 ans	128	96	17	7
Moins de 30 ans	39	31	6	3

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	6	4	2	10	9	8	11	10	9
épreuve 2 (sur 20)	7	5	4	11	10	9	12	11	10
Total écrit (sur 200)	66	48	30	104	95	88	110	104	100

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	1	1	0
12	0	0	0	1	1	1	4	4	3
11	3	3	3	4	4	4	11	11	8
10	10	10	9	11	11	8	17	14	9
9	17	17	11	16	16	10	36	25	12
8	29	27	12	32	25	12	52	27	12
7	44	27	12	45	27	12	74	27	12
6	63	27	12	67	27	12	99	27	12
5	99	27	12	88	27	12	132	27	12
4	128	27	12	116	27	12	164	27	12
3	159	27	12	147	27	12	188	27	12
2	188	27	12	177	27	12	207	27	12
1	208	27	12	203	27	12	211	27	12
0	211	27	12	219	27	12	212	27	12

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	13	10	8	15	13	10
épreuve 2 (sur 20)	12	8	7	14	11	9
Total général (sur 400)	211	196	178	242	211	201

le total général est ramené sur 20

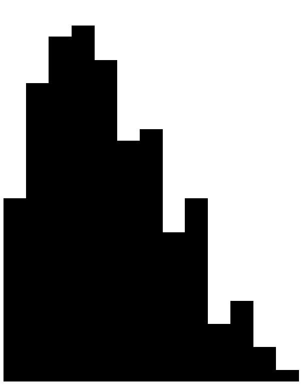
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	1	1
17	0	0	0	0	2	2
16	0	0	1	1	2	2
15	0	0	5	4	2	2
14	0	0	5	4	3	3
13	1	1	8	7	4	4
12	3	3	9	7	6	5
11	5	5	12	7	8	6
10	12	12	17	11	10	8
9	19	12	19	11	12	9
8	22	12	20	11	17	10
7	27	12	23	12	20	10
6	27	12	26	12	21	10
5	27	12	27	12	26	12
4	27	12	27	12	27	12
3	27	12	27	12	27	12
2	27	12	27	12	27	12
1	27	12	27	12	27	12
0	27	12	27	12	27	12

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	7	4	0	0
BESANCON	1	1	0	0
BORDEAUX	11	8	0	0
CAEN	9	7	1	0
CLERMONTFERRAND	2	2	1	0
DIJON	8	5	0	0
GRENOBLE	14	11	2	1
LILLE	40	32	6	1
LYON	18	14	2	2
MONTPELLIER	9	4	0	0
NANCY METZ	8	5	0	0
POITIERS	2	1	1	1
RENNES	26	21	4	2
STRASBOURG	11	8	1	0
TOULOUSE	8	6	1	1
NANTES	33	23	4	2
ORLEANS TOURS	5	3	0	0
REIMS	12	8	0	0
AMIENS	6	5	1	1
ROUEN	5	3	0	0
NICE	2	0	0	0
REUNION	1	1	0	0
MARTINIQUE	2	1	0	0
GUADELOUPE	1	1	0	0
GUYANNE	2	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	54	36	3	1

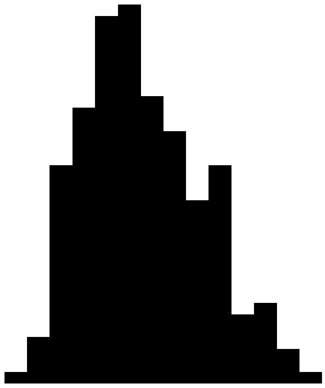
Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	14	7	0	0
MAIT-DOC REM TI	257	189	26	12
MAITRE ECH INST	26	15	1	0

catégories				
	I	P	a	A
ENSEIGN PRIVE	297	211	27	12

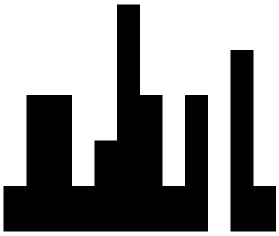
Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	78	48	0	0
AMIENS	6	5	1	1
CAEN	9	7	1	0
CLERMONT FERRAN	2	2	1	0
GRENOBLE	14	11	2	1
LILLE	36	29	6	1
LYON	18	14	2	2
NANTES	33	23	4	2
PARIS	54	36	3	1
POITIERS	2	1	1	1
RENNES	26	21	4	2
STRASBOURG	11	8	1	0
TOULOUSE	8	6	1	1



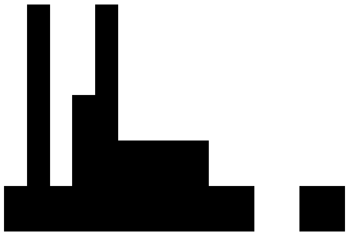
Écrit 1



Écrit 2



Oral 1



Oral 2

Programme

3 Programme du concours

3.1 Généralités

Avertissement : Le programme du concours est inchangé pour 2006, se reporter au BO n ° 3 du 29 avril 1999.

L'attention des candidats doit cependant être attirée sur l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire, notamment en ce qui concerne des éléments de statistique inférentielle et de théorie des graphes.

Il est vraisemblable que le programme du concours sera modifié l'an prochain, pour préciser les contenus associés à cette évolution, ainsi qu'à l'évolution des programmes de BTS.

3.2 Programme

Programme de l'Agrégation Interne et CAERPA de Mathématiques

Un professeur de Mathématiques devrait avoir élaboré et intériorisé une vue globale, personnelle et cohérente de ses connaissances dans sa discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres disciplines. La préparation à l'Agrégation Interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'Enseignement Secondaire étant d'autre-part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances.
S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi qu'il est proposé certains rapprochements qui peuvent être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut être d'abord approchée dans un cadre particulier, puis sous un aspect plus général.

A. PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ce programme comporte tous les programmes des classes de la seconde à la terminale incluses, dans toutes les sections.

B. PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

1. Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Application. Relation d'ordre.

Ensemble **N** des entiers naturels. Ensemble dénombrable. Non dénombrabilité de **R**.

Relation d'équivalence et ensemble quotient.

2. Algorithmique et informatique

Exemples d'algorithmes liés au programme.

Notion de variable, d'adresse. Instruction d'affectation, instructions conditionnelles, programmation itérative et récursive.

Fonctions et sous-programmes ; passage de paramètre. Rédaction en français ou en Pascal de programmes ne comportant qu'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes.

Aucun développement théorique n'est au programme.

3. Algèbre générale

a) Extensions successives de la notion de nombre

Anneau **Z** des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs de **Z**. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Congruences. Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax + by = c$.

Corps **Q** des nombres rationnels, **R** des nombres réels, **C** des nombres complexes. Théorèmes de d'Alembert-Gauss. Non dénombrabilité de **R** et **C**.

Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines n-ièmes de l'unité. Relations d'inclusion entre ces groupes. Polygones réguliers.

b) Anneaux et corps (Écrit seulement)

Définition (les anneaux sont unitaires par définition). Formule du binôme. Idéaux d'un anneau commutatif. Morphismes d'anneaux. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intègres. Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications (équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans **Z**).

Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur **Q**. Nombres transcendants.

c) Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K

Algèbre $\mathbf{K}[X]$. Division euclidienne. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun mutiple (PPCM). Théorèmes de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en facteurs irréductibles.
Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur **R** et **C**.

Dérivation des polynômes. Identité de Taylor.

d) Fractions rationnelles sur un corps commutatif K

Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité.

Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est **R** ou **C**.

Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

4. Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes devront être illustrées dans des situations géométriques (par exemple isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube).
Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément. Théorème de Lagrange. Image et noyau.

Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, classes de sous-groupes conjugués. Signification géométrique des notions de conjugaison. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

Polygones réguliers et groupes diédraux.

Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Groupes $O(E)$ et $SO(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes $U(E)$ et $SU(E)$ où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Formes réduites des isométries affines en dimension 2 et 3. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

5. Algèbre linéaire sur un sous-corps de C

a) Espaces vectoriels

Définition. Applications linéaires. Espace vectoriel $L(E, F)$. Algèbre $L(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$. Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.

Familles libres, génératrices, bases.
Étant donné u de $L(E, F)$, isomorphisme entre $\mathrm{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\ker(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

b) Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.
Formule liant dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Formule du rang. Caractérisation des automorphismes.

c) Matrices

Espaces $M_{p,q}(\mathbf{K})$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Isomorphisme canonique avec $L(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Utilisation de sous-matrices carrées pour la détermination du rang. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Matrice d'un endomorphisme d'un espace rapporté à une base. Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

Systèmes d'équations linéaires. Rang. Conditions de compatibilité. Systèmes de Cramer. Résolution par opérations élémentaires (pivot de Gauss). Applications à des problèmes de géométrie.

d) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Application à la résolution de systèmes linéaires, aux calculs de déterminants, à l'inversion de matrices carrées et au calcul du rang.

Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n, \mathbf{K})$ et $SL(n, \mathbf{K})$.

e) Déterminants

Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée. Expression développée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.

Application à l'inversion d'une matrice carrée. Formules de Cramer. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calculs de volumes simples.

Groupes $SL(E)$ et $SL(n, \mathbf{K})$.

f) Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application à la formule d'interpolation de Lagrange. Bijection entre les ensembles des sous-espaces de E et E^* par l'orthogonalité. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.

Transposée d'une application linéaire. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

g) Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Algèbre $\mathbf{K}[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, si le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème de décomposition des noyaux. Polynôme minimal. Sous-espaces caractéristiques.

Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme scindé annulateur à racines simples.

Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

Diagonalisation par blocs. Sous-espaces caractéristiques. Décomposition de Dunford : existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$ si le polynôme caractéristique est scindé.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes, systèmes différentiels, etc.).

h) Cas où le corps K est R ou C

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $L(E)$. Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels.

Exemples de parties denses de $L(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $L(E)$.

i) Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.

Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

6. Géométrie affine en dimension finie

Le corps de base est $\mathbf{R}$.

Définition d'un espace affine. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.

Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.

Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme du stabilisateur d'un point et du groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.

Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.

Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

7. Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

Les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.

a) Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallèllogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs et symétries. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$.

Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormée. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux axes de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.

Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.
Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

b) Angles

Matrice d'une rotation. Le groupe $SO(E)$ est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de $\mathbf{R}$ vers $SO(2)$. Mesure des angles.

Angles orientés de droites en dimension 2.

Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours.

Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

c) Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

d) Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.

e) Espaces hermitiens

Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$.

Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

8. Géométrie affine euclidienne orientée

a) Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.

Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.

Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.

Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.

Groupe des similitudes.

b) Géométrie plane

Propriété angulaire du cercle et applications.
Faisceau harmonique de deux droites et de leurs bissectrices.

Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Orthogonalité entre cercles.

c) Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification en les trois genres affines : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.

Section plane d'un cône de révolution.

Trajectoire parabolique d'un objet pesant. Mouvement à accélération centrale. Mouvement des planètes.

9. Propriétés affines et métriques

Pour toutes les situations géométriques, on réfléchira aux propriétés de caractère affine et à celles de nature métrique (ou euclidienne).

Groupes affines et groupes euclidiens.
Propriétés affines et euclidiennes des coniques.
Notions différentielles de caractère affine et métrique.
Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

10. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels ou complexes

Corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ des réels et complexes. La construction de $\mathbf{R}$ étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.

Complétude de $\mathbf{R}$: toute suite de Cauchy de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ on peut extraire une sous-suite convergente.

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

b) Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Étude de la convergence par les relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.

Critères de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemple d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

c) Continuité

Fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$. Limite, continuité à droite et à gauche, continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrema. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction monotone f sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

d) Dérivabilité

Dérivée à droite et à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.

Dérivées successives. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit.

Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Étude locale des fonctions. Conditions nécessaires d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.

Série de Taylor.

e) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions. Fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Fonctions circulaires directes et réciproques.

f) Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs

de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

g) Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Formule de Fubini si le paramètre décrit un segment. Lien avec les intégrales doubles.

h) Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I de définition.

Intégrale d'une fonction positive. Emploi des relations de comparaison.

Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des intégrales des f_n est majorée, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

i) Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Intégration par parties.

Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.

j) Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de continuité : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X. Si le module de $f(x, t)$ est majoré par $g(t)$, où g est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est continue sur X.

Théorème de dérivation : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X et admettant une dérivée partielle f'_x par rapport à x. Si le module de f'_x(x,t) est majoré par $h(t)$, où h est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est dérivable sur X et sa dérivée est l'intégrale de f'_x par rapport à t.

Exemples de fonctions définies par une intégrale (fonction Gamma d'Euler, transformée de Fourier).

k) Analyse numérique

Approximations d'un nombre par des suites : rapidité de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.
Approximation d'une solution d'équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.
Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur.
Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente ; recherche d'une valeur approchée de la somme d'une telle série.

Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ par la méthode d'Euler.

11. Analyse à une variable complexe

a) Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul du rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.

Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Dérivation par rapport à la variable complexe sur ce disque ouvert.

b) Extension à $\mathbf{C}$ des fonctions usuelles

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π, fonctions sinus et cosinus.
Application à la mesure des angles.

12. Analyse fonctionnelle et vocabulaire de la topologie

a) Topologie et espaces métriques

Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques.

Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace entier, caractérisation par les images réciproques des ouverts et fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

b) Espaces vectoriels normés sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. Applications linéaires continues, normes de ces applications.

c) Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$.

Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.

d) Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbf{R}$. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

e) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

Exponentielle d'un endomorphisme.

f) Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui même. Application aux approximations successives.

Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

g) Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach.
Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.

Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.

Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

h) Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

i) Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthogonalité des fonctions e^{inx}. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π-périodique f continue par morceaux. Sommes partielles $S_n(f,x) = \sum_{-n \leqslant k \leqslant n} c_k(f)e^{ikx}$. Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.

Théorèmes de convergence de Dirichlet et F é jer. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

13. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de R^n à valeurs dans R^p.

a) Topologie de $\mathbf{R}^n$.

Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$; elles sont équivalentes. Complétion. Parties compactes. Limites et applications continues.

b) Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrices jacobiennes, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω : l'application associant à un point de Ω sa différentielle est continue.
Théorème admis : pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que les dérivées partielles soient continues sur Ω.

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Difféomorphismes. Caractérisation des difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^1$. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert connexe.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Gradient d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de deux variables en un point où $rt - s^2 \neq 0$. Exemples de problèmes d'extrema issus de la géométrie.

Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^k$.

c) Équations différentielles

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{C}^n$).

Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.
Dimension de l'espace vectopriel des solutions. Méthode de la variation des constantes.

Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A ou emploi du théorème de Cayley-Hamilton. Équations linéaires scalaires à coeffients constants. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.

Équations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solution de l'équation sans deuxième membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.

Notions sur les équations scalaires non linéaires (écrit seulement).

Solutions d'une équation $x' = f(t,x)$, ou $x'' = f(t,x,x')$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$; existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathcal{C}^1$.

Exemples d'études qualitatives.

Résolution d'équations à variables séparables et homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.

Applications en physique et en géométrie différentielle.

14. Calcul intégral et probabilités

a) Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force. Intégrales doubles et triples. Linéarité et additivité relativement aux ensembles.

Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.
Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue positive et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Théorème de Fubini : Si f est une fonction de deux variables continue de module intégrable, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.

Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Extension des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini au cas de fonctions de n variables.

Applications à des calculs d'intégrales.

Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.

Exemples de calculs d'aires et de volumes.

b) Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des évènements élémentaires) ; tribu (ou ß-algèbre) des évènements ; mesure de probabilité sur cette tribu. Etude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

c) Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $P_B[A]$ de A sachant B si $P[B]$ est positif. Formule des probabilités composées et formule de Bayes. Indépendance d'un nombre fini d'évènements.

d) Variables aléatoires réelles

Etant donné un espace probabilisé (Ω,f,P), on appelle *variable aléatoire réelle* (v.a.r. en abrégé), toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que l'image réciproque $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{I})$ de tout intervalle I de $\mathbf{R}$ appartienne à la tribu f. On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..

On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :

Variables aléatoires réelles discrètes. Une v.a.r. est dite *discrète* si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbf{N}$. Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli ; loi binomiale ; loi géométrique et loi de Poisson.

Variables aléatoires réelles possèdant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité* sur $\mathbf{R}$, toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ intégrable sur $\mathbf{R}$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$. On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f, si pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, $P[\{X \in I\}] = \displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Fonction de répartition et moments (espérance, variance et écart type) d'une v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis). Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné ; loi exponentielle ; loi normale.

Si X est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$, alors on admettra que $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $\mathrm{E}[\Phi(X)] = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \Phi(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

e) Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est un *vecteur aléatoire* si chacune de ses composantes est une v.a.r.. On se limitera aux deux cas suivants :
Vecteurs aléatoires discrets. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans $\mathbf{R}^p$ est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.

Loi d'un vecteur aléatoire X. Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.

Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité sur* $\mathbf{R}^p$ toute fonction f de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}_+$, intégrable sur $\mathbf{R}^p$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégrales multiples »). Soit f une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^p$. On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ possède la loi de densité f, si pour tous intervalles $I_1, ..., I_p$ de $\mathbf{R}$,

$$P[\{X_1 \in I_1\} \cap ... \cap \{X_p \in I_p\}] = \int_{I_1} \ldots \int_{I_p} f(x_1, ..., x_p)\,\mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_p.$$

Soit $X = (X_1, \ldots,\ X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit ψ un produit d'une fonction continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ par une fonction indicatrice d'un domaine « géométriquement simple » de $\mathbf{R}^p$ et telle que la fonction $|\psi|f$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^p$. On admettra que $\psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :

$$\mathrm{E}[\psi(X)] = \int_{\mathbf{R}} \ldots \int_{\mathbf{R}} \psi(x_1, x_2, \ldots, x_p) f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,\mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_p.$$

Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possèdant une loi avec densité. Loi normale.

f) Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.

Les résultats suivants sont admis : Loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possèdant une espérance. Théorème central limite pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.

Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi normale (loi de Gauss).

15. Géométrie différentielle

Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

a) Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.

Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace. plan osculateur.

b) Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Abscisse curviligne.

En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure.
En dimension 3, repère de Frenet, courbure, torsion.

c) Cinématique

Vitesse, accélération. Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, circulaires, à accélération centrale. Oscillateurs harmoniques. Exemples de problèmes de mécanique (pendule, chute des corps, mouvements des planètes).

Épreuves écrites

4 Rapport sur les épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

4.1.1 Énoncé de la première épreuve écrite

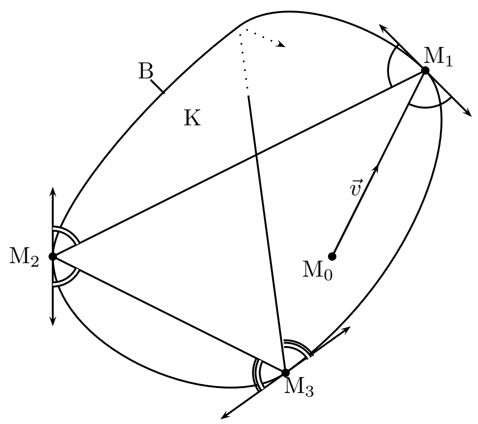
Préambule

On note $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes respectivement.

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien usuel $<,>$ et de la norme associée $\| \ \|$. Le plan vectoriel $\mathbf{R}^2$ est orienté de sorte que la base canonique $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ soit directe. Si N et P sont deux points distincts de $\mathcal{P}$, on désigne par NP la droite affine passant par N et P.

Soit K une partie compacte et convexe de $\mathcal{P}$ dont l'intérieur K_0 n'est pas vide. On note B la frontière de K dans $\mathcal{P}$, appelée aussi *bord* de K. On admettra la propriété suivante : *une droite passant par un point de* K_0 *rencontre* K *selon un segment* $[\mathrm{N},\mathrm{P}]$, *et l'on a* $\mathrm{K}_0 \cap \mathrm{NP} =]\mathrm{N},\mathrm{P}[$ *et* $\mathrm{B} \cap \mathrm{NP} = \{\mathrm{N},\mathrm{P}\}$.

L'objet de ce problème est l'étude du trajet d'un rayon lumineux (ou encore d'une boule de billard assimilée à un point) issu d'un point M_0 intérieur à K, dirigé par un vecteur $\vec{v}$ donné, $\vec{v} \neq \vec{0}$, et qui se réfléchit selon les lois de l'optique géométrique sur le bord B de K.



Plus précisément, on appelle *trajectoire* de $(\mathrm{M}_0, \vec{v})$ la suite $(\mathrm{M}_n)_{n \geqslant 0}$ constituée de M_0 et des points $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots$ définis, pour $n \geqslant 1$, par les quatre propriétés suivantes :

(1) pour tout $n \geqslant 1$, le point M_n appartient à B ;

(2) les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}$ sont colinéaires de même sens ;

(3) pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{M}_{n-1} \neq \mathrm{M}_n$;

(4) la normale à B en M_n existe et c'est la bissectrice intérieure de l'angle en M_n du triangle $\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$.

On admettra que la donnée de $(\mathrm{M}_0, \vec{v})$ définit (sous réserve de la condition (4)) une unique trajectoire $(\mathrm{M}_n)_{n \geqslant 0}$.

Soit p un entier naturel non nul, on dit que la trajectoire $(\mathrm{M}_n)_{n \geqslant 0}$ est *périodique* de période p si $\mathrm{M}_{n+p} = \mathrm{M}_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

I. Nombre de rotations d'une ligne polygonale fermée

Soit k un entier $\geqslant 1$. Dans tout le problème, on suppose que le bord B de l'ensemble compact convexe K est paramétré par

$$f : t \mapsto e^{it}\rho(t)\,,$$

où ρ est une fonction de la variable réelle t, à valeurs strictement positives, de classe C^k et 2π-périodique.

1) *Abscisse curviligne sur* B. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(t) = \int_0^t \sqrt{\rho(u)^2 + \rho'(u)^2}\; du.$$

a) Démontrer que g est un C^k-difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

b) Prouver que $g(t+2\pi) = g(t) + g(2\pi)$ pour tout nombre réel t.

On définit un paramétrage de B, *en posant, pour* $s \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{M}(s) = (f \circ g^{-1})(s)\,,$$

et on pose $\mathrm{L} = g(2\pi)$.

c) Calculer la norme euclidienne de $\dfrac{\overrightarrow{d\mathrm{M}}}{ds}(s)$ (vecteur dérivé de M par rapport à s).
Interpréter géométriquement L.

d) Démontrer que l'application $s \mapsto \mathrm{M}(s)$ est L-périodique, et que $\mathrm{M}(s_1) = \mathrm{M}(s_2)$ si et seulement si $s_2 - s_1 \in \mathrm{L}\mathbf{Z}$.

2) *Nombre de rotations d'une ligne polygonale fermée.*

Soit p un entier $\geqslant 1$ et soient $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots, \mathrm{N}_{p+1}$ des points de B.

a) Choisissons un nombre réel s_1 tel que $\mathrm{M}(s_1) = \mathrm{N}_1$. Démontrer qu'il existe une unique suite $(s_2, \ldots, s_{p+1})$ de nombres réels telle que $\mathrm{M}(s_{i+1}) = \mathrm{N}_{i+1}$ et $s_i \leqslant s_{i+1} < s_i + \mathrm{L}$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

b) Supposons $\mathrm{N}_{p+1} = \mathrm{N}_1$. Prouver alors que $m = \dfrac{s_{p+1} - s_1}{\mathrm{L}}$ est un entier indépendant du choix de s_1 tel que $\mathrm{M}(s_1) = \mathrm{N}_1$.

L'entier m est appelé *nombre de rotations* de la ligne polygonale fermée $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots, \mathrm{N}_{p-1}, \mathrm{N}_p, \mathrm{N}_1$.
Comparer m et p.

3) Dessiner, sans justification, une ligne polygonale fermée de 7 sommets, inscrite dans un ensemble compact convexe du plan, dont le nombre de rotations est 3.

II. Théorème de Birkhoff

Les notations et les hypothèses sont celles du préambule et de la partie I. En particulier, on considère le paramétrage de B par $s \mapsto \mathrm{M}(s)$ défini dans la partie I. On suppose en outre dans cette partie que trois points distincts de B ne sont jamais alignés.

L'objet des questions qui suivent est de prouver que, si m et p sont des entiers satisfaisant à $1 \leqslant m \leqslant p-1$, il existe au moins une trajectoire $(\mathrm{M}_n)_{n\geqslant 0}$ périodique de période p et telle que le nombre de rotations de la ligne polygonale fermée $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_p, \mathrm{M}_1$ soit égal à m. Une telle trajectoire est dite de *type* (m,p) [la définition de « période » d'une trajectoire est donnée dans le Préambule, celle de « nombre de rotations » dans la question $(\mathrm{I}, 2, b)$].

1) On définit une application ψ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ en posant

$$\psi(s,s') = \|\overrightarrow{\mathrm{M}(s)\mathrm{M}(s')}\|.$$

On pose aussi $\Omega = \{(s,s') \in \mathbf{R}^2 \mid (s'-s) \notin \mathrm{L}\mathbf{Z}\}$; on admettra que l'ensemble Ω est ouvert dans $\mathbf{R}^2$.

a) Prouver que l'application ψ est continue sur $\mathbf{R}^2$ et de classe C^k sur Ω.

b) Exprimer, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles de ψ à l'aide d'angles que l'on précisera.

2) On suppose $p = 2$.

a) Démontrer que la fonction ψ admet un maximum absolu sur $\mathbf{R}^2$.

b) Prouver l'existence d'une trajectoire de type $(1,2)$.

3) On suppose $p \geqslant 3$ et $1 \leqslant m \leqslant p-1$.

On désigne par W l'ensemble des points $(s_1, \ldots, s_p)$ de $\mathbf{R}^p$ satisfaisant aux conditions

$$0 \leqslant s_{i+1} - s_i \leqslant \mathrm{L} \text{ pour } i = 1, \ldots, p-1 \quad \text{ et } \quad (m-1)\mathrm{L} \leqslant s_p - s_1 \leqslant m\mathrm{L}.$$

On définit une fonction F sur W en posant

$$\mathrm{F}(s_1, \ldots, s_p) = \psi(s_1,s_2) + \psi(s_2,s_3) + \cdots + \psi(s_{p-1},s_p) + \psi(s_p,s_1).$$

a) Construire un élément $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ de W tel que l'ensemble constitué par les points $\mathrm{M}(\alpha_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, possède au moins deux éléments.

b) Pour simplifier les notations, posons $\mathrm{A}_i = \mathrm{M}(\alpha_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Démontrer que si $\mathrm{A}_1 \neq \mathrm{A}_2$ et $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_3$, il existe un élément α' de W tel que $\mathrm{F}(\alpha') > \mathrm{F}(\alpha)$.

En déduire que, si deux points consécutifs de la suite $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p, \mathrm{A}_1$ sont confondus, il existe un élément α' de W tel que $\mathrm{F}(\alpha') > \mathrm{F}(\alpha)$.

c) Démontrer que la fonction F admet un maximum absolu strictement positif sur W.

d) Prouver l'existence d'une trajectoire de type (m,p).

III. Billard elliptique

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < b < a$; posons $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. On suppose dans cette partie que le bord B de K est l'ellipse de foyers O et $\mathrm{O}' = \mathrm{O} + 2c\,\vec{\varepsilon}_1$, de demi axes a et b.

On admettra que l'ellipse B est paramétrée par

$$f(t) = e^{it}\ \frac{b^2}{a - c\ \cos t}\ ,$$

et que B est aussi l'ensemble des points N du plan $\mathcal{P}$ tels que $\|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\| + \|\overrightarrow{\mathrm{O'N}}\| = 2a$.

Comme dans la partie I, on utilise le paramétrage de B par $s \mapsto \mathrm{M}(s)$.

1) En dérivant l'application $s \mapsto \|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\| + \|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\|$, démontrer que l'ellipse B possède une tangente en $\mathrm{M}(s)$ qui est la bissectrice extérieure du triangle $\mathrm{O'M}(s)\mathrm{O}$ en $\mathrm{M}(s)$. On notera $\mathrm{D}(s)$ cette tangente.

2) Étant donnés une droite affine D de $\mathcal{P}$, un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à D et un point P de la droite D, on considère le produit

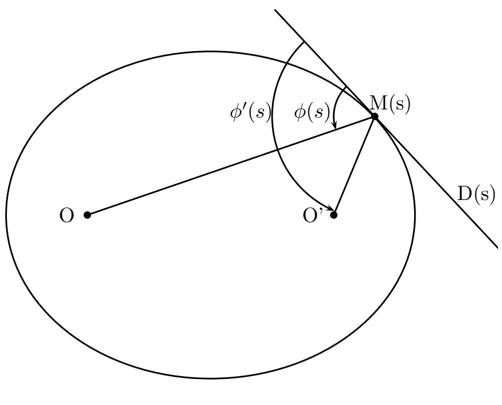
$$\mathcal{E}(\mathrm{D}, \vec{n}, \mathrm{P}) = < \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \vec{n} >< \overrightarrow{\mathrm{O'P}}, \vec{n} > .$$

a) Démontrer que $\mathcal{E}(\mathrm{D}, \vec{n}, \mathrm{P})$ ne dépend pas du choix du point P de D ni du choix du vecteur normal unitaire $\vec{n}$.

On appelle *énergie de la droite* D par rapport aux points O et O′ et on note $\mathcal{E}(\mathrm{D})$ la valeur du produit $\mathcal{E}(\mathrm{D}, \vec{n}, \mathrm{P})$.

b) Interpréter géométriquement la valeur absolue ainsi que le signe de l'énergie $\mathcal{E}(\mathrm{D})$.

3) *Énergie d'une droite* $\mathrm{D}(s)$ *tangente en* $\mathrm{M}(s)$ *à l'ellipse* B. On rappelle que, pour $s \in \mathbf{R}$, on note $\mathrm{D}(s)$ la tangente à l'ellipse B au point $\mathrm{M}(s)$. On note respectivement $\phi(s)$ et $\phi'(s)$ les mesures appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ des angles orientés de droites $(\mathrm{D}(s), \mathrm{M}(s)\mathrm{O})$ et $(\mathrm{D}(s), \mathrm{M}(s)\mathrm{O}')$.



a) Déterminer quelle relation lie $\phi(s)$ et $\phi'(s)$? En déduire une expression de l'énergie $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s))$ en fonction de $\phi(s)$, de $\|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\|$ et de $\|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\|$.

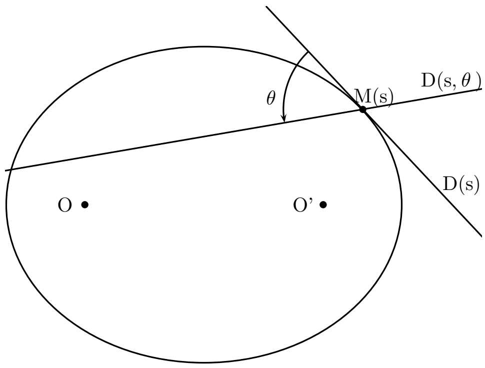
b) Démontrer l'égalité $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s)) = b^2$.

4) a) Déduire des résultats précédents une relation liant b, $\sin\phi(s)$, $\|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\|$ et $\|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\|$.

b) On désigne par L le périmètre de l'ellipse B (on ne cherchera pas à calculer L). Pour $s \in \mathbf{R}$, on pose $h(s) = (\sin\phi(s))^2$. Démontrer que la fonction h est L-périodique, de classe C^∞, et donner le tableau de ses variations sur l'intervalle $[0, \mathrm{L}]$.

5) *Énergie d'une droite* $\mathrm{D}(s,\theta)$ *issue d'un point* $\mathrm{M}(s)$. Pour $s \in \mathbf{R}$ et $\theta \in [0,\pi]$, on note $\mathrm{D}(s,\theta)$ la droite issue du point $\mathrm{M}(s)$ telle que

$$(\mathrm{D}(s), \mathrm{D}(s,\theta)) \equiv \theta \pmod{\pi}.$$



Démontrer que l'énergie $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s,\theta))$ a pour expression

$$\mathcal{E}(\mathrm{D}(s,\theta)) = b^2\ \frac{(\cos\theta)^2 - (\cos\phi(s))^2}{(\sin\phi(s))^2}.$$

6) *Étude de* $\mathrm{E}(s,u)$.

Pour $s \in \mathbf{R}$ et $u \in [-1,1]$, on pose $\mathrm{E}(s,u) = \mathcal{E}(\mathrm{D}(s, \arccos u))$, de sorte que l'on a

$$\mathrm{E}(s,u) = \frac{b^2}{(\sin\phi(s))^2}\ (u^2 - (\cos\phi(s))^2).$$

Déterminer les extrema globaux de la fonction E sur $\mathbf{R} \times [-1,1]$. A quelles droites $\mathrm{D}(s,\theta)$ correspondent-ils ?

7) Soit $(\mathrm{M}_n)_{n\geqslant 0}$ une trajectoire et soit E_0 l'énergie de la droite $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$.

a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, l'énergie de la droite $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$ vaut E_0.

b) On suppose $\mathrm{E}_0 > 0$; démontrer qu'alors les droites $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$, pour $n \geqslant 0$, sont toutes tangentes à une même ellipse que l'on déterminera.

IV. La transformation T

Les hypothèses et les notations sont celles de la partie III.

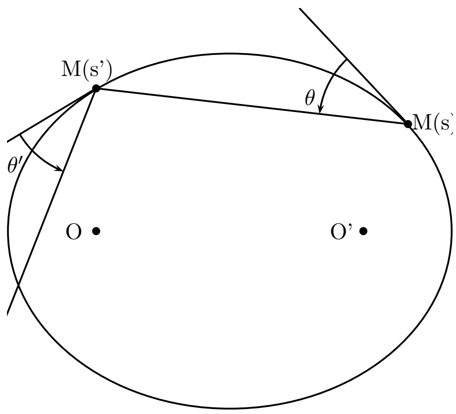
Comme dans la question (III.5), pour tout couple $(s,u) \in \mathbf{R}\times]-1,1[$, on pose $\theta = \arccos u$ et on considère la droite $\mathrm{D}(s,\theta)$ issue du point $\mathrm{M}(s)$ telle que

$$(\mathrm{D}(s), \mathrm{D}(s,\theta)) \equiv \theta \pmod{\pi}.$$

Cette droite recoupe l'ellipse B en un point $\mathrm{M}(s')$, où $0 < s' - s < \mathrm{L}$, et se réfléchit selon les lois de l'optique géométrique en une droite $\mathrm{D}(s',\theta')$, où θ' est la mesure appartenant à l'intervalle $]0,\pi[$ de l'angle orienté de droites $(\mathrm{D}(s'), \mathrm{D}(s',\theta'))$. On pose $u' = \cos\theta'$ et on définit l'application T de $\mathbf{R}\times]-1,1[$ dans lui-même par

$$\mathrm{T}(s,u) = (s',u') = (\mathrm{T}_1(s,u), \mathrm{T}_2(s,u)).$$

On admettra que l'application T est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}\times]-1,1[$.



On considère dans cette partie, la fonction ψ définie dans la question (II.1) et la fonction E définie dans la question (III.6).

1) Démontrer que la fonction E est invariante par T.

2) On définit deux fonctions G_1 et G_2 sur $\Omega' = \{(s,s') \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < s' - s < \mathrm{L}\}$ par

$$\mathrm{G}_1(s,s') = (s, -\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,s')), \qquad \mathrm{G}_2(s,s') = (s', \frac{\partial\psi}{\partial s'}(s,s')).$$

On admettra que $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial s'}$ ne s'annule jamais.

a) Démontrer l'égalité $\mathrm{T}\circ\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2$.

b) En déduire la valeur du déterminant jacobien de T.

3) a) Démontrer qu'il existe une fonction $\mathrm{U} : \mathbf{R}\times]0,b^2[\to]0,1[$, de classe C^∞, telle que

$$\mathrm{E}(s,\mathrm{U}(s,r)) = r \qquad \text{pour tout } (s,r) \in \mathbf{R}\times]0,b^2[.$$

b) Pour $(s,r) \in \mathbf{R}\times]0,b^2[$, posons $\mathrm{J}(s,r) = (s,\mathrm{U}(s,r))$. En admettant que $\mathrm{T}_2(s,\mathrm{U}(s,r))$ est toujours positif, démontrer que, pour $s \in \mathbf{R}$ et $0 < r < b^2$, on a l'égalité

$$(\mathrm{T}\circ\mathrm{J})(s,r) = \mathrm{J}(\mathrm{T}_1(s,\mathrm{U}(s,r)),r).$$

c) Soit E_0 un nombre réel tel que $0 < \mathrm{E}_0 < b^2$. Pour $s \in \mathbf{R}$, on pose

$$\mu(s) = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}(s,\mathrm{E}_0) , \qquad \nu(s) = \mathrm{T}_1(s,\mathrm{U}(s,\mathrm{E}_0)).$$

Démontrer que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, on a

$$\mu(s) = (\mu\circ\nu)(s)\,\nu'(s).$$

4) On suppose toujours $0 < \mathrm{E}_0 < b^2$. On désigne par B' l'ellipse de foyers O et O′ , dont le demi petit axe vaut $b' = \sqrt{\mathrm{E}_0}$. Pour $s \in \mathbf{R}$, on pose

$$\chi(s) = \int_0^s \mu(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel χ_0 (ne dépendant que de E_0) tel que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, on ait

$$\chi(\nu(s)) = \chi(s) + \chi_0.$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur χ_0 et $\chi(\mathrm{L})$, pour qu'il existe une trajectoire périodique $(\mathrm{M}_n)_{n\geqslant 0}$, pour laquelle toutes les droites $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$, $n \geqslant 0$, sont tangentes à l'ellipse B' .

b) Réciproquement, démontrer que si cette condition est remplie, toute trajectoire $(\mathrm{M}_n)_{n\geqslant 0}$, pour laquelle toutes les droites $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$, $n \geqslant 0$ sont tangentes à l'ellipse B' , est une trajectoire périodique.

——— o o o ———

4.1.2 Corrigé de la première épreuve écrite

I. Nombre de rotations d'une ligne polygonale fermée

1.a) Les fonctions ρ et ρ' sont de classe C^{k-1} et la fonction ρ ne s'annule pas. Par conséquent, la fonction à intégrer est aussi de classe C^{k-1}, et la primitive g de cette fonction est de classe C^k.

La fonction ρ est périodique, continue et strictement positive ; elle admet donc un minimum $m > 0$ (sur $[0, 2\pi]$, donc sur $\mathbf{R}$).

Ainsi la fonction g est strictement croissante continue, c'est donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R})$. Comme on a $|g(t)| \geq m|t|$, l'image de la fonction g est la droite tout entière.

On a vu que la fonction g est de classe C^k et que sa dérivée g' ne s'annule pas. La bijection réciproque de g est donc aussi de classe C^k. Autrement dit, g réalise un C^k difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

1.b) Comme la fonction ρ est 2π-périodique, la fonction $t \mapsto g(t + 2\pi) - g(t)$ a une dérivée nulle ; Elle est donc constante, égale à sa valeur en $t = 0$ soit $g(2\pi)$.

On peut aussi écrire la relation

$$g(t + 2\pi) = \int_0^{2\pi} g'(u)\, du + \int_{2\pi}^{t+2\pi} g'(u)\, du$$

et remarquer que l'on a

$$\int_{2\pi}^{t+2\pi} g'(u)\, du = \int_0^t g'(u)\, du$$

en raison de la périodicité de la fonction g'.

1.c) Soient $t \in \mathbf{R}$ et $s = g(t)$. On a $(f \circ g^{-1})'(s) = f'(t)/g'(t) = e^{it}(\rho' t) + i\rho(t))/\sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}$. Le module de ce nombre complexe est égal à 1, donc le vecteur $\overrightarrow{d\mathrm{M}}/ds$ est unitaire.

On a vu que $|f'(t)| = g'(t)$; par suite $g(t)$ est la longueur algébrique de l'arc paramétré $f|[0, t]$ et L est la longueur de la courbe paramétrée B.

1.d) Soit $s \in \mathbf{R}$; posons $t = g^{-1}(s)$. Alors d'aprés b), on a $g^{-1}(s + \mathrm{L}) = t + 2\pi$. Comme la fonction f est 2π-périodique, la fonction M est L-périodique.

La fonction g est bijective d'aprés a). Pour que $\mathrm{M}(s_1) = \mathrm{M}(s_2)$, il faut et il suffit que $f(t_1) = f(t_2)$, ou que $t_1 \equiv t_2 \pmod{2\pi}$, ou finalement $s_1 \equiv s_2 \pmod{\mathrm{L}}$.

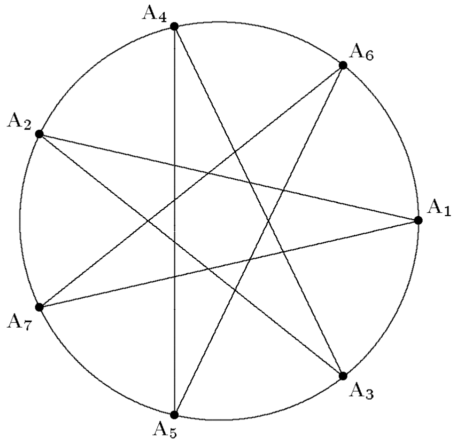
2.a) D'aprés (1.d), l'application M réalise une bijection de $[s, s + \mathrm{L}[$ sur B. Cela permet de construire s_k par récurrence sur l'entier k, $1 \leqslant k \leqslant p + 1$. Supposons $s_1, \ldots, s_k$ construits ; il existe un unique nombre réel s' dans $[s_k, s_k + \mathrm{L}[$ tel que $\mathrm{M}(s') = \mathrm{N}_{k+1}$. D'où l'existence et l'unicité de s_k puis de la suite $s_2, \ldots, s_{p+1}$.

2.b) Supposons $\mathrm{N}_{p+1} = \mathrm{N}_1$. Alors m est un entier d'aprés (1.d) et comme $s_1 \leqslant s_{p+1}$, m est entier $\geqslant 0$.

Soit s_1' un autre choix. D'aprés (1.d), il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $s_1' = s_k + n\mathrm{L}$. D'aprés l'unicité dans la construction (I.2.a), on a $s_k' = s_k + n\mathrm{L}$ pour$1 \leqslant k \leqslant p + 1$. Il en résulte que l'on a $s_{p+1} - s_1 = s_{p+1}' - s_1'$, et l'entier m est bien indépendant du choix de s_1.

Par construction, on a $0 \leqslant s_{k+1} - s_k \leqslant \mathrm{L}$ pour $1 \leqslant k \leqslant p + 1$. En écrivant $s_{p+1} - s_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} s_{k+1} - s_k$, on obtient $0 \leqslant s_{p+1} - s_1 \leqslant p\mathrm{L}$, d'où $0 \leq m \leq p - 1$.

3)



II. Théoréme de Birkhoff

1.a) Les applications f et g^{-1} sont de classe C^k, l'une par hypothése, l'autre d'aprés (I.1.a). L'application $s \mapsto M(s)$ est donc de classe C^k par construction. Il en est de même de l'application $(s, s') \mapsto \overrightarrow{M(s)M(s')}^2$.

La racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est une application continue pour $x \geqslant 0$ et de classe C^∞ pour $x > 0$. D'où le résultat demandé.

1.b) On note $< \, , \, >$ le produit scalaire de $\mathbf{R}^2$.

$\dfrac{\partial \psi}{\partial s'}(s, s') = \dfrac{\partial}{\partial s'}\Big(\overrightarrow{M(s)M(s')}^2\Big)^{1/2} = < \overrightarrow{M(s)M(s')} \, , \, \dfrac{d\overrightarrow{M(s')}}{ds'} \Big/ \Big(\overrightarrow{M(s)M(s')}^2\Big)^{1/2} > .$

Posons

$$\overrightarrow{T}(s) = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds}(s) \quad \text{et } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{M(s)M(s')}}{\|\overrightarrow{M(s)M(s')}\|}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{T}(s)$, $\overrightarrow{T}(s')$ et $\vec{u}$ sont unitaires, et l'on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial s'}(s, s') = < \overrightarrow{T(s')}, \vec{u} > = \cos\theta'$$

où θ' désigne l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{T(s')}, \vec{u})$. De même

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s, s') = - < \overrightarrow{T(s)}, \vec{u} > = -\cos\theta,$$

où θ désigne l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{T(s)}, \vec{u})$.

2.a) Posons $V = [0, L] \times [0, L]$. L'ensemble V est une partie compacte de $\mathbf{R}^2$. Sur cet ensemble, l'application continue ψ admet un maximum atteint en un point de V. En raison de la périodicité de l'application $s \mapsto M(s)$, l'image de ψ est $\psi(V)$. Ce maximum est donc un maximum pour ψ sur $\mathbf{R}^2$.

2.b) Comme l'arc B n'est pas réduit à un point, le maximum de ψ est strictement positif. Il est donc atteint en un point $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ de $V \cap \Omega$. Quitte à permuter les rôles de s et s', on peut supposer $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant L$.

Les dérivées partielles de ψ existent au point α ; comme c'est un maximum, elles sont nulles.

Posons $A_1 = M(\alpha_1)$ et $A_2 = M(\alpha_2)$. D'aprés (II 1.b), la droite affine A_1A_2 est normale à B en A_1 et en A_2. En choisissant pour M_0 le milieu du segment $[A_1, A_2]$, et pour $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{M_0, A_1}$, il vient $M_1 = A_1$

(conditions 1 et 3 du préambule), puis $M_2 = A_2$, $M_3 = A_1$, etc. La trajectoire obtenue est donc bien de type $(n,p) = (1,2)$.

3.a) Puisque $1 \leqslant m \leqslant p-1$, on peut choisir $\alpha_k = k\mathrm{L}$ pour $k = 1,\ldots,m$ puis $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_p = m\mathrm{L}+\mathrm{L}/2$ Alors α est bien un élément de W avec $\mathrm{M}(\alpha_1) \neq \mathrm{M}(\alpha_p)$.

3.b) Supposons $A_1 \neq A_2$; on a donc $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_1 + \mathrm{L}$. Si, de plus, on a $A_2 = A_3$, alors $\alpha_3 = \alpha_2$ ou bien $\alpha_3 = \alpha_2 + \mathrm{L}$. On peut choisir $\alpha_2' < \alpha_2$ (1er cas) ou $\alpha_2' > \alpha_2$ (2éme cas) de telle sorte que $\alpha_1 < \alpha_2' < \alpha_1 + \mathrm{L}$ et $\alpha_2' < \alpha_3 < \alpha_2' + \mathrm{L}$. Le p-uplet $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2', \alpha_3, \ldots, \alpha_p)$ est élément de W et les points A_1, A_2', A_3 correspondants sont distincts, donc non alignés. Il résulte de l'inégalité triangulaire stricte que $\mathrm{F}(\alpha') > \mathrm{F}(\alpha)$.

Supposons deux points consécutifs confondus. S'ils sont tous confondus alors $\mathrm{F}(\alpha) = 0$ et d'après (II.3.a), il existe α tel que $\mathrm{F}(\alpha) > 0$.

Sinon il existe $j \leqslant p$ tel que $A_{j-1} \neq A_j$ et $A_j = A_{j+1}$. Le raisonnement précédent s'applique alors.

3.c) Posons $\mathrm{V} = ([0,\mathrm{L}] \times \mathbf{R}^{p-1}) \cap \mathrm{W}$. L'ensemble V est fermé et borné dans $\mathbf{R}^p$, donc compact. L'application continue F admet un maximum sur V, atteint en un point de V. En raison de la périodicité de l'application $s \mapsto \mathrm{M}(s)$ on a $\mathrm{F}(\mathrm{W}) = \mathrm{F}(\mathrm{V})$. L'application F admet dons un maximum absolu sur W, atteint en un point $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ de W.

D'après (II.3.a), il existe des éléments α de W tels que $\mathrm{F}(\alpha) > 0$; par suite le maximum de F dans W est strictement positif.

3.d) D'après (II.3.b, c, d), le maximum de F est atteint en un point α tel que $A_i \neq A_{i+1}$ pour $i = 1,\ldots,p$, en posant $A_{p+1} = A_1$. La fonction F est donc différentiable en ce point et ses dérivées partielles sont nulles. Il résulte de (II.1.b) que la normale au point A_i à l'arc B est la bissectrice intérieure issue du sommet A_i du triangle $A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

En choisissant pour M_0 le milieu du segment $[A_p, A_1]$ et pour $\vec{v}$ le vecteut $\overrightarrow{M_0A_1}$, on obtient, conformément au préambule, $M_1 = A_1, \ldots, M_p = A_p$, $M_{p+1} = A_1$, $M_{p+2} = A_2$ et la trajectoire $(A_1, \ldots, A_p, \ldots)$ est périodique de période p.

Comme α appartient à W, on a $0 < \alpha_{i+1} - \alpha_i < \mathrm{L}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, et on a aussi $(m-1)\mathrm{L} < \alpha_p - \alpha_1 < m\mathrm{L}$. En prenant $\alpha_{p+1} = \alpha_1 + m\mathrm{L}$, on obtient $0 < \alpha_{p+1} - \alpha_p < \mathrm{L}$. Par conséquent le nombre de rotations de la ligne polygonale fermée $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_1)$ est m.

Le choix précédent conduit à une trajectoire de type (m,p).

III. Billard elliptique

1) Le même calcul que dans la question (II.1) donne

$$\frac{d\|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\|}{ds} = < \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}}{\|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\|}, \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}}{ds} > .$$

La dérivée demandée est égale à

$$< \overrightarrow{\mathrm{T}(s)}, \overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}/\|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\| > + < \overrightarrow{\mathrm{T}(s)}, \overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}/\|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\| > .$$

Comme la fonction $s \mapsto \|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\| + \|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\|$ est constante, cette dérivée est nulle, donc $\mathrm{D}(s)$ est bissectrice extérieure du triangle $\mathrm{O'M}(s)\mathrm{O}$ en $\mathrm{M}(s)$.

2.a) Si l'on change le vecteur $\vec{n}$ en son opposé, le produit ne change pas. D'autre part, si R est un autre point de la droite D, on a

$$< \overrightarrow{\mathrm{OR}}, \vec{n} > = < \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{RP}}, \vec{n} > = < \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \vec{n} >,$$

puisque les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ sont orthogonaux.

De même, on a $<\overrightarrow{\mathrm{O'R}}, \vec{n}> = <\overrightarrow{\mathrm{O'P}}, \vec{n}>$.

Le produit $\mathcal{E}(\mathrm{D}, \vec{n}, \mathrm{P})$ est donc indépendant des choix du vecteur normal $\vec{n}$ et du point P de la droite D.

2.b) La valeur absolue de $\mathcal{E}(\mathrm{D}, \vec{n}, \mathrm{P})$ est le produit des distances des points O et O′ à la droite D.

Le signe indique la position relative de D par rapport au segment $[\mathrm{O}, \mathrm{O}']$: il est négatif si la droite coupe le segment, positif sinon. En d'autres termes, il est négatif si la droite D sépare les points O et O′, positif si les deux points sont dans le même demi-plan dont la frontière est la droite D.

3.a) D'après la question (III.1), on a $\phi'(s) = \pi - \phi(s)$. Comme ϕ et ϕ' sont dans l'intervalle $[0, \pi]$, on a $\sin\phi(s) = \sin\phi'(s)$.

La distance du point O à la droite D(s) est égale à $\|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\| \sin\phi(s)$. De même, la distance de O′ à la droite D est $\|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\| \sin\phi'(s)$.

De la question (III.2.b), on déduit $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s)) = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\|\|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\|(\sin\phi(s))^2$.

3.b) On peut utiliser l'équation réduite de l'ellipse B dans le repère $(\mathrm{J}, \vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$, où J est le centre de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le demi vecteur gradient $\overrightarrow{\mathrm{N}} = \frac{x(s)}{a^2}\vec{\varepsilon_1} + \frac{y(s)}{b^2}\vec{\varepsilon_2}$ est orthogonal à la tangente D(s). Les points O et O′ ont pour coordonnées respectives $(-c, 0)$ et $(c, 0)$.

On peut ainsi calculer $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s))$ en revenant à la définition

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathrm{D}(s))\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|^2 &= \left(\frac{(x(s)+c)x(s)}{a^2} + \frac{y(s)^2}{b^2}\right)\left(\frac{(x(s)-c)x(s)}{a^2} + \frac{y(s)^2}{b^2}\right), \\
&= \left(\frac{cx(s)}{a^2} + 1\right)\left(-\frac{cx(s)}{a^2} + 1\right) \\
&= 1 - \frac{c^2x(s)^2}{a^4}
\end{aligned}$$

Le calcul de $\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|$, en utilisant l'équation de l'ellipse, donne

$$\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|^2 = \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{c^2x^2}{a^4}\right),$$

d'où l'égalité $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s)) = b^2$.

Autre méthode : notons H et H′ les projections orthogonales des points O et O′ sur la droite D(s), et posons $d = \mathrm{OH}$ et $d' = \mathrm{OH'}$. Soit N point d'intersection des droites (OM) et (O′H′). Comme la droite D(s) est bissectrice du couple des droites OM et O′M, les points O′ et N sont symétriques par rapport à la droite D(s). On a donc $\mathrm{O'M} = \mathrm{NM}$ et $\mathrm{H'N} = d'$. Le théorème de Pythagore donne $\mathrm{ON}^2 = \mathrm{HH'}^2 + (d + d')^2$ d'une part, et d'autre part $\mathrm{OO'}^2 = \mathrm{HH'}^2 + (d - d')^2$. Ainsi $4dd' = \mathrm{ON}^2 - \mathrm{OO'}^2$.

Or on a $\mathrm{ON} = \mathrm{OM} + \mathrm{O'M} = 2a$ et $\mathrm{OO'}^2 = 4c^2 = 4(a^2 - b^2)$, d'où $dd' = b^2$.

On peut aussi savoir que les points H et H′ sont des points du cercle principal de l'ellipse. Si K est le second point d'intersection de la droite OH et de ce cercle, la symétrie par rapport au centre de l'ellipse donne $\overrightarrow{\mathrm{O'H'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OK}}$, d'où $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s)) = <\overrightarrow{\mathrm{O'H'}}, \overrightarrow{\mathrm{OH}}> = -<\overrightarrow{\mathrm{OK}}, \overrightarrow{\mathrm{OH}}>$. On reconnait l'opposé de la puissance du point O par rapport au cercle principal. En utilisant le grand axe comme sécante, cette puissance vaut $(c + a)(c - a)$, soit $-b^2$.

4.a) Les deux expressions de $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s))$ calculées dans la question précédente sont égales.

$$b^2 = (\sin\phi(s))^2 \|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\| \|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\|.$$

4.b) Posons $d(s) = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\|$, et remarquons que l'on a $\|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\| = 2a - d(s)$. On obtient

$$h(s) = \frac{b^2}{a^2 - (a - d(s))^2}.$$

La fonction f est 2π- périodique, la fonction M et la fonction d sont L-périodiques, de même que la fonction h. Ces fonctions sont toutes de classe C^∞.

La variation de $|f(t)|$ en fonction de t est élémentaire : elle résulte de la définition de f et de la variation de $\cos t$. Par ailleurs, la fonction s est croissante de 0 à L quand t varie de 0 à 2π.

t	0		t_0		π		t_1		2π
$\lvert f(t)\rvert$	$a+c$	$\searrow$	a	$\searrow$	$a-c$	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$a+c$
s	0	$\nearrow$	L/4	$\nearrow$	L/2	$\nearrow$	3L/4	$\nearrow$	L

La fonction h est composée de la fonction $s \mapsto d(s)$ et de la fonction H définie par

$$\mathrm{H}(d) = \frac{b^2}{a^2 - (a - d)^2}.$$

d	$a-c$		a		$a+c$
$\mathrm{H}(d)$	1	$\searrow$	b^2/a^2	$\nearrow$	1

D'où la variation de la fonction h.

s	0		L/4		L/2		3L/4		L
$h(s)$	1	$\searrow$	b^2/a^2	$\nearrow$	1	$\searrow$	b^2/a^2	$\nearrow$	1

5) Les distances des points O et O′ à la droite $\mathrm{D}(s,\theta)$ sont $\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\|\,|\sin(\phi(s)-\theta)|$ et $\|\overrightarrow{\mathrm{O'M}}\|\,|\sin(\phi'(s)-\theta)|$.

D'après l'interprétation géométrique faite en (II.2.b), on a

$$\mathcal{E}(\mathrm{D}(s,\theta) = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}(s)}\|\; \|\overrightarrow{\mathrm{O'M}(s)}\|\; \sin(\phi(s)-\theta)\; \sin(\phi'(s)-\theta).$$

Un petit calcul donne

$$\sin(\phi(s)-\theta)\; \sin(\phi'(s)-\theta) = (\cos\theta)^2 - (\cos\phi(s))^2.$$

En utilisant (III.4.a), on en déduit :

$$\mathcal{E}(\mathrm{D}'s,\theta) = \frac{b^2}{(\sin\phi(s))^2}((\cos\theta)^2 - (\cos\phi(s))^2).$$

6) On a $\mathrm{E}(s,u) = b^2 - b^2 \dfrac{1-u^2}{(h(s))^2}\cdot$ Sur cette expression, on voit que le maximum de $\mathrm{E}(s,u)$ est égal à b^2, et qu'il ne peut être atteint que pour $|u| = 1$, c'est-à-dire $\theta = 0$ ou π, et qu'il est alors atteint pour toute valeur de s. Les droite $\mathrm{D}(s,\theta)$ sont les tangentes à l'ellipse ; ce sont les droites d'énergie maximale.

Le minimum de $\mathrm{E}(s,u)$ est atteint pour $u = 0$ et $h(s)$ minimum, donc pour $s = \mathrm{L}/4 \pmod{\mathrm{L}/2}$. Ce minimum vaut $b^2 - a^2$, atteint pour la droite portant le petit axe de l'ellipse, médiatrice du segment $[\mathrm{O}, \mathrm{O}']$.

7.a) Soit $n \geqslant 1$ et soit $s \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{M}(s) = \mathrm{M}_n$. De la propriété de réflexion en M_n, il résulte que si $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n-1} = \mathrm{D}(s,\theta)$, alors $\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n = \mathrm{D}(s, \pi - \theta)$.

Comme l'énergie $\mathcal{E}(\mathrm{D}(s,\theta)$ est invariante par le changement de θ en $\pi - \theta$, on en déduit $\mathcal{E}(\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n) = \mathcal{E}(\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n-1})$, et ceci pour tout $n \geqslant 1$. D'où l'invariance demandée.

7.b) L'énergie de la droite $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$ est strictement positive, donc cette droite ne coupe pas $[\mathrm{O}, \mathrm{O}']$. Il existe alors une ellipse unique de foyers O et O′ tangente à cette droite. D'après l'étude des extréma de la fonction E, cette ellipse a pour demi petit axe $b' = \sqrt{\mathrm{E}_0}$; c'est donc la même ellipse pour tout entier n.

IV. La transformation T

1) Soit $(s,u) \in \mathbf{R}\times]-1,1[$ et $(s',u') = \mathrm{T}(s,u)$. Avec les notations précédentes, la droite $\mathrm{D} = \mathrm{M}(s)\mathrm{M}(s')$ est la droite $\mathrm{D}(s, \operatorname{Arccos} u)$ et aussi la droite $\mathrm{D}(s', \pi - \operatorname{Arccos} u')$. $\mathrm{E}(\mathrm{D}) = \mathrm{E}(s,u) = \mathrm{E}(s',u') = \mathrm{E}(\mathrm{T}(s,u))$.

2.a) Soit $(s,s') \in \Omega'$. D'après (II.1.b), on a

$$\mathrm{G}_1(s,s') = (s, -\cos\theta), \qquad \mathrm{G}_2(s,s') = (s', \cos\theta'),$$

on a donc bien $\mathrm{T} \circ \mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2$.

2.b) Les matrices jacobiennes $\mathrm{J}ac(\mathrm{G}_1)$ et $\mathrm{J}ac(\mathrm{G}_2)$ s'écrivent

$$\mathrm{J}ac(\mathrm{G}_1)(s,s') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s^2} & -\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial s'} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{J}ac(\mathrm{G}_2)(s,s') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial s'\,\partial s} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial s'^2} \end{pmatrix}$$

D'après (IV.2a), on a $\mathrm{J}ac(\mathrm{G}_2) = \mathrm{J}ac(\mathrm{T})\,\mathrm{J}ac(\mathrm{G}_1)$. En raison de la symétrie de Schwarz, les déterminants jacobiens de G_1 et G_2 sont égaux, et l'énoncé les suppose $\neq 0$. Enfin l'image de Ω' par l'application G_1 est $\mathbf{R}\times]-1,1[$. On en conclut que $\mathrm{Jac}(\mathrm{T}) = 1$ sur Ω'.

3.a) A partir de l'expression de $\mathrm{E}(s,u)$ donnée dans la question (III.6), en posant $\mathrm{E}(s,u) = r$, on peut résoudre en u, et on obtient

$$\mathrm{U}(s,r) = \sqrt{r\frac{(\sin\phi(s))^2}{b^2} + (\cos\phi(s))^2}$$

La fonction U est bien de classe C^∞ dans $\mathbf{R}\times]0, b^2[$ et à valeurs dans $]0,1[$ puisque $0 < r < b^2$.

3.b) Soit $(s,r) \in \mathbf{R}\times]0,b^2[$. Posons $u = \mathrm{U}(s,r)$, puis $(s',u') = \mathrm{T}(s,u)$. Alors $\mathrm{J}(\mathrm{T}_1(s, \mathrm{U}(s,r)), r) = \mathrm{J}(\mathrm{T}_1(s,u), r) = \mathrm{J}(s', r) = (s', \mathrm{U}(s',r))$ tandis que $\mathrm{T}(\mathrm{J}(s,r)) = \mathrm{T}(s, \mathrm{U}(s,r)) = \mathrm{T}(s,u) = (s',u')$.

Il reste à prouver l'égalité $u' = \mathrm{U}(s',r)$. De l'invariance de E par T et par définition de U, on a $r = \mathrm{E}(s,u) = \mathrm{E}(s',u') = \mathrm{E}(s', \mathrm{U}(s',r)$. D'après l'expression de E, on déduit que u' est égal à $\mathrm{U}(s',r)$ au signe près. Comme ils sont tous deux positifs, l'égalité demandée est démontrée.

3.c) De l'égalité de la question précédente, on déduit une égalité des déterminants jacobiens. On rappelle que l'on a vu $\mathrm{J}ac(\mathrm{T}) = 1$ dans la question (IV.2), et on pose $\nu(s,r) = \mathrm{T}_1(s, \mathrm{U}(s,r))$. On a $\mathrm{Jac}(\mathrm{J})(s,r) = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}(s,r)$. On obtient

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}(s,r) = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}(\nu(s,r), r)\ \frac{\partial \nu}{\partial s}(s,r),$$

ceci pour tout $(s,r) \in \mathbf{R}\times]0, b^2[$.

4.a) D'après le résultat précédent, la dérivée de l'application $s \mapsto \chi(\nu(s)) - \chi(s)$ est nulle. d'où l'existence de χ_0.

On peut aussi écrire, en utilisant la question précédente,

$$\chi(\nu(s)) - \chi(\nu(0)) = \int_{\nu(0)}^{\nu(s)} \mu(t)\, dt = \int_0^s \mu(\nu(v))\, \nu'(v) dv = \int_0^s \mu(v)\, dv,$$

d'où il résulte $\chi(\nu(s)) = \chi(s) + \chi(\nu(0))$.

Soit $(\mathrm{M}_n)_{n\geqslant 0}$ une trajectoire. Pour que les droites $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$ soient tangentes à l'ellipse B', d'après la question (III.7), il faut et il suffit que leur énergie soit égale à E_0.

Dans ce cas, remarquons que si $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}(s)$, où $s \in \mathbf{R}$, alors $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}(s')$ où $s' = \nu(s)$. Par conséquent, si $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}(s_1)$, et si (s_n) est la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence $s_n = \nu(s_{n-1})$, on a $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}(s_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Pour que la trajectoire $(\mathrm{M}_n)_{n\geqslant 0}$ soit périodique de période $p \geqslant 1$, il faut et il suffit qu'il existe un entier m, $1 \leqslant m \leqslant p-1$, tel que $\nu^p(s_1) = s_1 + m\mathrm{L}$.

La fonction $\mathrm{U}(s,r)$ est périodique de période L par rapport à la variable s. On a donc

$\chi(s_1 + m\mathrm{L}) = \chi(s_1) + m\chi(\mathrm{L})$.

D'autre part, on a $\chi(\nu^n(s_1)) = \chi(s_1) + n\chi_0$.

On peut vérifier que la fonction μ est strictement croissante. Il en résulte que, pour que $\nu^p(s_1) = s_1 + m\mathrm{L}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$m\chi(\mathrm{L}) = p\chi_0.$$

C'est la condition cherchée.

4.b) La condition trouvée est indépendante de s_1. Si une trajectoire d'énergie E_0 est périodique de période p, toutes le sont.

4.1.3 Commentaires sur la première épreuve écrite

Cette première épreuve établit des résultats d'existence de trajectoires de billard dans un cadre général d'abord, ensuite dans le cas particulier d'un billard elliptique. Les notions mises en jeu se situent dans les domaines de la géométrie différentielle (abscisse curviligne), du calcul différentiel du premier ordre (composition, extréma), et un peu de géométrie pure (angles et coniques). L'équation polaire de l'ellipse était donnée dans l'énoncé, ainsi que la définition bifocale. Le premier théorème de Poncelet était énoncé et sa démonstration était guidée.

L'épreuve a dans l'ensemble été peu réussie par les candidats.

Question (I.1.a) : les correcteurs ont été surpris par le fait, apparent dans les copies, que beaucoup de candidats ne semblent pas connaître le mot « difféomorphisme ». Un nombre encore plus important de candidats semblent ignorer le théorème d'inversion globale pour les fonctions d'une variable.

Question (I.1.d) : le fait que L soit la plus petite période de l'application $s \mapsto \mathrm{M}(s)$ (le « seulement si » de l'énoncé) n'a pas été correctement démontré, ou a été simplement omis, dans de nombreuses copies.

Question (II.1.a) : la fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$, mais n'est pas dérivable au point 0, faut-il le rappeler ?

Question (II.1.b) : pratiquement aucune copie n'a donné une interprétation géométrique correcte du résultat. Dès lors, la poursuite de cette partie était fortement compromise. Pourtant, il ne s'agissait que de l'expression du produit scalaire euclidien, dans la plan, à l'aide du *cosinus*.

Questions (II.2) et (II.3.a et b) : traitées correctement dans un quart des copies.

Question (II.3.d) : aucune copie n'a donné de réponse satisfaisante à cette question.

Partie III : c'est sans doute la partie du problème la mieux traitée dans l'ensemble (sauf les questions 6 et 7). Il est à noter la question (III.1), démonstration du classique théorème de Poncelet, n'a pourtant pas eu beaucoup de succès.

La partie IV n'a pratiquement pas été abordée.

En conclusion, cette épreuve était de difficulté moyenne pour des candidats ayant un minimum de connaissances en géométrie différentielle élémentaire et en calcul différentiel du premier ordre. Les questions géométriques étaient soigneusement encadrées. Néanmoins, cette épreuve a mis en difficulté une grande majorité des candidats.

4.2 Deuxième épreuve écrite

4.2.1 Énoncé de la deuxième épreuve écrite

Notations et objectifs du problème.

On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres complexes, par $\mathbf{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ formé des suites bornées et par $\mathbf{E}_c$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ constitué des suites convergentes (il n'est pas demandé d'établir ces inclusions).

Si $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ est un élément de $\mathbf{E}$ on pose $\|x\|=\sup\{|x_k|,\ k\geqslant 0\}$; on admet que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbf{E}$ et que $\mathbf{E}$ est complet pour cette norme.

On note $\mathscr{T}$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ associe $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $y_k = \dfrac{\sum_{j=0}^{k} x_j}{k+1}\cdot$ Cette application est linéaire (il n'est pas demandé de le démontrer).

Questions préliminaires

1. Montrer que $\mathbf{E}$ est stable par $\mathscr{T}$. On note T la restriction de $\mathscr{T}$ à $\mathbf{E}$.
2. Vérifier que T est une application linéaire continue.
3. Montrer que $\mathbf{E}_c$ est stable par T et plus précisément que si x converge vers l, il en est de même pour $y = Tx$.

Objectifs

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de T. Il est constitué de trois parties indépendantes.

La partie I permet d'examiner quelques exemples montrant une variété importante de comportements possibles.

Dans la partie II on détermine le noyau, l'image et le spectre de T.

La partie III est consacrée à l'aspect régularisant de T. On y établit que :

1. Si x est une suite bornée, $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une suite constante.
2. L'ensemble des suites x de $\mathbf{E}$ telles que, pour tout n, $T^n x$ soit une suite divergente, est dense dans $\mathbf{E}$.
3. Si Ω est l'ensemble des suites à termes dans $[0, 1]$, on définit la probabilité de Kolmogoroff P sur Ω et on démontre que :
   (a) $P(x \in \Omega \text{ et } x \text{ converge}) = 0$.
   (b) $P(x \in \Omega \text{ et } T(x) \text{ converge}) = 1$.

Partie I : Exemples

A. Premiers exemples

1. Soit θ dans $]0, 2\pi[$; dans cette question on note x la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $x_k = \exp(ik\theta)$. On pose $y = Tx$. Démontrer que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
2. Soit n un entier $\geqslant 1$; dans cette question on note x la suite définie par $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   On pose $y = Tx$.

   (a) Calculer y_{pn+j} pour $p \geqslant 0$ et $0 \leqslant j < n$;

   (b) En déduire que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
3. Quel est le lien entre les exemples précédents et la troisième question préliminaire ?
4. Soit t dans $[0, 1]$. On définit $x(t)$ par :

$$\begin{cases} x_0(t) = t \\ x_{k+1}(t) = (x_k(t) - 1)^2 \text{ pour } k \geqslant 0. \end{cases}$$

   Il est facile de voir que, pour tout t dans $[0, 1]$, la suite $x(t)$ est à valeurs dans $[0, 1]$.

   On pose alors $y(t) = Tx(t)$.

   Soit t_0 le nombre $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$ (Il vaut $0,38$ à 10^{-2} près).

   (a) On se propose de démontrer que, lorsque $t \neq t_0$, la suite $x(t)$ est divergente.

      i. On suppose la suite $x(t)$ convergente. Trouver la limite ℓ de $x(t)$.

      ii. Vérifier que, si $t \neq t_0$, alors, pour tout entier k, $x_k(t) \neq \ell$.

      Si, dans ces conditions, la suite $x(t)$ était convergente, quelle serait la limite (quand k tend vers l'infini) du rapport $\dfrac{x_{k+1}(t) - \ell}{x_k(t) - \ell}$?

      iii. Conclure.

   (b) On définit f et g fonctions de $[0, 1]$ dans lui-même par :

      $f(x) = (x - 1)^2$ et $g = f \circ f$.

      i. Dessiner le graphe de la fonction g en précisant les variations, la position du graphe par rapport à la première bissectrice et ses points d'intersection avec cette droite.

      ii. *Pour cette question , on peut se contenter d'une argumentation basée sur le graphe.*

      Montrer que les suites extraites $(x_{2k}(t))_{k\geqslant 0}$ et $(x_{2k+1}(t))_{k\geqslant 0}$ sont convergentes.

      En déduire que $y(t)$ est convergente et identifier sa limite en fonction de t.

      iii. On rappelle que $y(t) = (y_k(t))_{k\geqslant 0}$. La suite de fonctions (y_k) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

B. Une remarque

Soit x dans $\mathbf{E}$ et $y = Tx$.

1. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $|y_k - y_{k-1}| \leqslant \dfrac{2\|x\|}{k+1}$.

2. En déduire que si x est une suite à valeurs réelles alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est un intervalle.

C. Suites à valeurs dans $\{0, 1\}$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose $u_p = 1! + 2! + 3! + \cdots + p!$ et $v_p = 1! + 3! + 5! + \cdots + (2p-1)!$
De plus $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$.

1. Montrer que $u_p \underset{p\to\infty}{\sim} p!$ (on pourra mettre $p!$ en facteur). Montrer de même que $v_p \underset{p\to\infty}{\sim} (2p-1)!$
   On définit une suite x de la manière suivante :
   si $k \in \mathbf{N}$, il existe un unique $j(k) \geqslant 0$ tel que $u_{j(k)} \leqslant k < u_{j(k)+1}$ et dans ce cas, si $j(k)$ est pair on pose $x_k = 1$, si $j(k)$ est impair on pose $x_k = 0$.
   Autrement dit
   $$x = 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, (24 \text{ fois}), 1, 1, 1, (120 \text{ fois}) \ldots$$
2. On pose $y = Tx$. Calculer y_k lorsque $k = u_p$.
3. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est égal à $[0, 1]$.
   Quel est celui de la suite x ?
4. Soient $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ un espace probabilisé, $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et de paramètre $1/2$. ($\forall k \geqslant 0,\ P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = 1/2$).
   (a) Calculer, pour $k \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$, $P(X_k = X_{k+1} = X_{k+2} = ... = X_{k+p} = 0)$, puis $P(\forall j \geqslant k, X_j = 0)$.
   (b) En déduire que la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ diverge presque sûrement.
   (c) On appelle Y la suite TX où X est la suite (X_k).
   Montrer, en utilisant un théorème de cours, que la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ converge presque sûrement.

Partie II. Étude de l'endomorphisme T

A. Généralités

1. Montrer que l'application linéaire $\mathscr{T}$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur lui-même.
2. On désigne par $\mathscr{A}$ l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{k+1}, k \in \mathbf{N}\right\}$. Soit λ un nombre complexe. On note $I_{\mathscr{E}}$ l'application identique de $\mathscr{E}$ dans lui-même.
   (a) Montrer que si λ n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{A}$, alors l'application linéaire $\mathscr{T} - \lambda I_{\mathscr{E}}$ est bijective.
   (b) Montrer que si λ appartient à l'ensemble $\mathscr{A}$, alors l'application linéaire $\mathscr{T} - \lambda I_{\mathscr{E}}$ n'est ni injective ni surjective.

3. Soit $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ dans $\mathbf{E}$. Montrer que :

$$y \in \mathrm{Im}(T) \iff \exists K > 0 \text{ tel que, } \forall k \geqslant 1, \quad |(k+1)y_k - k y_{k-1}| \leqslant K.$$

4. L'application linéaire T de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?

B. Quelques suites auxiliaires

Dans ce **B.** , on considère un nombre complexe λ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(L) \qquad \lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \mathscr{A}, \quad \mathrm{Re}\,\frac{1}{\lambda} \neq 1.$$

On écrit $1 - \dfrac{1}{\lambda} = a + ib$ avec a et b réels ($a \neq 0$). On définit la suite α par :

$$(*) \qquad \alpha_0 = \frac{1}{1-\lambda} \text{ et, pour } k \geqslant 1,\ \alpha_k = \frac{1}{(1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\frac{1}{k})}\alpha_{k-1}.$$

Cette suite est bien définie grâce aux hypothèses (L).

1. Vérifier que $\alpha_k \neq 0$ pour tout entier positif k.
2. Montrer que $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| \ = -\dfrac{a}{k} + \underset{k\to\infty}{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.
3. Que dire de la suite $|\alpha|$ si a est négatif ?
4. On rappelle qu'il existe un nombre réel γ tel que l'on ait : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Pour a positif, montrer qu'il existe une nombre réel A_1 strictement positif tel que : $|\alpha_k| \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{A_1}{k^a}$.

   (A_1 et les nombres réels $A_2, \ldots, A_5$ qui suivent dépendent de λ mais sont indépendants de k).

5. On définit $U_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j|\alpha_{j-1}|}$ et $V_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \left|\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\right|$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante A_2 strictement positive telle que :

   $$\forall k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant U_k \leqslant A_2\ k^a.$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante A_3 telle que $\forall k \geqslant 1\ |\alpha_k\ U_k| \leqslant A_3$.
6. En exprimant $\dfrac{1}{\alpha_j} - \dfrac{1}{\alpha_{j-1}}$ grâce à (*) montrer qu'il existe une constante A_4 strictement positive telle que :

   $$\forall k \geqslant 1, \quad |\alpha_k| V_k \leqslant A_4.$$

C. Détermination du spectre de T.

Définition.

Soit S un endomorphisme continu de $\mathbf{E}$, on dit que S est inversible si S réalise une bijection de $\mathbf{E}$ sur lui-même.

Remarque : $\mathbf{E}$ étant complet, il résulte d'un théorème de Banach que si S est bijectif et continu, alors S^{-1} est continu, de sorte que S est alors un élément inversible de l'algèbre des endomorphismes continus de E.

On appelle spectre de S, et on note $\sigma(S)$, l'ensemble des nombres complexes λ tels que $S - \lambda I_{\mathbf{E}}$ n'est pas inversible.

On **admettra** que $\sigma(S)$ est un fermé de $\mathbf{C}$.

1. Est-ce que 0 est dans $\sigma(T)$? Même question pour 1.

   Dorénavant, on se donne un complexe λ **vérifiant les hypothèses** (L) **du II.B.** On garde les notations $\alpha, U, V, \ldots$ du **II.B.**

2. Soient x et y deux éléments de $\mathscr{E}$. Vérifier que :

$$(**) \quad (T - \lambda I_{\mathbf{E}})(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 & = \dfrac{1}{1-\lambda} y_0 \\ \forall k \geqslant 1,\ x_k & = \dfrac{1}{1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\frac{1}{k}} \left(x_{k-1} + \dfrac{1}{\lambda}(y_{k-1} - y_k - \dfrac{1}{k} y_k) \right) \end{cases}$$

3. On considère $y = \left(\dfrac{1}{k+1} \right)_{k \geqslant 0}$.

   On considère la suite x (*a priori* élément de $\mathscr{E}$) telle que $(T - \lambda I_{\mathbf{E}})(x) = y$.

   (a) Quel est le lien entre x et la suite α du **II.B.** ?

   (b) En utilisant **II.B.** montrer que, si $\mathrm{Re}(1 - \dfrac{1}{\lambda}) < 0$, alors $\lambda \in \sigma(T)$.

4. On suppose $\mathrm{Re}(1 - \dfrac{1}{\lambda}) > 0$.

   Soit y dans $\mathbf{E}$ et soit x la suite définie par les formules $(**)$ ci-dessus.

   (a) Établir les relations suivantes :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{x_{k-1}}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\lambda} \frac{y_{k-1} - y_k}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\lambda} \frac{y_k}{k \alpha_{k-1}}.$$

$$\forall k \geqslant 1, \quad x_k = \alpha_k y_0 + \frac{\alpha_k}{\lambda} \sum_{j=1}^{k} (y_{j-1} - y_j) \frac{1}{\alpha_{j-1}} - \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{y_j}{j \alpha_{j-1}} \right) \alpha_k.$$

   (b) En remarquant que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} (y_{j-1} - y_j) \frac{1}{\alpha_{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} y_j \left(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}} \right) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k}$, montrer qu'il existe une constante A_5 (indépendante de y et de k) telle que

$$\forall k \geqslant 0, \ |x_k| \leqslant A_5 ||y||.$$

5. Déterminer $\sigma(T)$ et le représenter sur un dessin.

Partie III. Propriétés régularisantes de T

Notations et terminologie

1. On sera amené à considérer des suites de suites (ou plus généralement des familles de suites). Si I est un ensemble d'indices le symbole $\left((x_k^{(i)})_{k\geqslant 0}\right)_{i\in I}$ désigne la famille des suites $x^{(i)}$ indexées par I, $x_k^{(i)}$ est le terme d'indice k de la suite $x^{(i)}$.

   Par exemple considérer $\left(\left(\dfrac{1}{(k+1)^n}\right)_{k\geqslant 0}\right)_{n\geqslant 0}$, c'est considérer les suites :

   $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1.......)$

   $x^{(1)} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5.......)$

   $x^{(2)} = (1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25........)$

   $x^{(3)} = (1, 1/8, 1/27, 1/64, 1/125......)$ etc.

   Dans l'énoncé, k désignera presque toujours l'indice des suites de complexes et n sera réservé à l'indexation des suites de suites.

2. Limites :

   A priori, le mot suite, sans indication contraire, désigne un élement de $\mathscr{E}$; aussi, lorsque l'on dit que la suite $(x_k^{(n)})_{k\geqslant 0}$ converge on veut dire que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(n)}$ existe dans $\mathbf{C}$.

   Si on veut exprimer l'idée qu'il existe dans $\mathbf{E}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$, on dira que la suite $(x^{(n)})$ d'élements de $\mathbf{E}$ converge dans $\mathbf{E}$ vers x.

   Les expressions utilisées seront suffisamment détaillées pour éviter toute ambiguïté.

A. Convergence simple

Définition. Soient $(x^{(n)})_{n\geqslant 0} = ((x_k^{(n)})_{k\geqslant 0})_{n\geqslant 0}$ une suite d'élements de $\mathbf{E}$ et u dans $\mathbf{E}$. On dit que $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ si pour tout $k \geqslant 0$, $(x_k^{(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers u_k quand n tend vers l'infini.

1. Exceptionnellement, dans cette question et la suivante, les suites de nombres complexes sont indexées par n pour des raisons qui apparaitront ultérieurement.

   Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes tendant vers ℓ dans $\mathbf{C}$.

   Soit α un nombre complexe tel que $|\alpha| < 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha^j\, a_{n-j}$.

   Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{1-\alpha}$.

2. Soient v et w deux suites de nombres complexes telles que :
   $$\begin{cases} \text{Pour tout entier } n \geqslant 0, \quad v_{n+1} = \alpha v_n + w_n, \\ (w_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \ell. \end{cases}$$
   Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{1-\alpha}$.

3. Soit x une suite de nombres complexes. On pose $a = x_0$ et $b = x_1$. On considère la suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbf{E}$ définie par $x^{(n)} = T^n x$, en convenant que $x^{(0)} = x$.

   (a) Calculer $x_0^{(n)}$. Quelle est la limite de la suite $x_0^{(n)}$?

   (b) Calculer $x_1^{(n)}$. Quelle est la limite de la suite $x_1^{(n)}$?

   (c) Montrer que :

   $$\forall k, n \geqslant 0,\ x_{k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{k+2}\, x_{k+1}^{(n)} \ + \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k} x_j^{(n)}.$$

   (d) Montrer que $x^{(n)}$ converge simplement vers la suite constante égale à a.

4. Montrer que, si $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge dans $\mathbf{E}$, alors sa limite est la suite constante égale à a.

5. On suppose que $a = 0$ et que la suite (x_k) a une limite $c \neq 0$ dans $\mathbf{C}$.

   Montrer que $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ diverge dans $\mathbf{E}$.

B. Lissage : un résultat négatif

Pour n entier fixé, on note $\mathbf{E}_n = \{x \in \mathbf{E}$ telles que $T^n x$ converge dans $\mathbf{C}\}$. $\mathbf{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

On admet le théorème suivant :

Soit $\mathbf{F}$ un espace de Banach. Si pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{F}_n$ est un sous ensemble de $\mathbf{F}$ fermé et d'intérieur vide, alors la réunion de tous les $\mathbf{F}_n$ est aussi d'intérieur vide.

1. Soit $\mathbf{F}$ un espace vectoriel normé et G un sous espace vectoriel de $\mathbf{F}$ d'interieur non vide.

   Ainsi G contient une boule ouverte de $\mathbf{F}$, de centre x_0 et de rayon ε strictement positif.

   En utilisant la structure d'espace vectoriel, montrer successivement que :

   (a) G contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε,

   (b) $\mathbf{F} = G$.

2. On admet provisoirement, dans cette question, que $\mathbf{E}_n \neq \mathbf{E}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

   (a) Montrer que $\mathbf{E}_c$ est un sous espace fermé de $\mathbf{E}$.

   (b) Montrer que l'ensemble des x de $\mathbf{E}$ tels que, pour tout $n \geqslant 0$, la suite $T^n x$ ne soit pas convergente dans $\mathbf{C}$ est dense dans $\mathbf{E}$.

3. On prouve dans cette question ce qui est admis à la question précédente.

   (a) Soient t_0 un nombre réel positif et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbf{C}$.

   Pour $n \geqslant 0$, on note (H_n) l'hypothèse :

   $$(H_n) \qquad \exists t_1 \geqslant t_0, \quad \forall j \leqslant n, \quad \exists M_j, \quad \forall t > t_1, \quad |f^{(j)}(t)| \leqslant \frac{M_j}{t^j} \quad \text{avec } f^{(0)} = f$$

   .

Pour $t \geqslant t_0+1$, on pose $g(t) = (t+1)f(t) - tf(t-1)$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[t_0+1, \infty[$.

On suppose (H_n) vérifiée pour la fonction f et un entier $n \geqslant 1$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que g vérifie (H_{n-1}).

(b) Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, \infty[$, satisfaisant l'hypothèse (H_n) avec $t_0 = 0$. Pour tout entier $k \geqslant O$, on pose $y_k = f(k)$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe x dans $\mathbf{E}$ telle que $y = T^n x$.

(c) On pose $y = (\exp(i \ln(k+1)))_{k \geqslant 0}$.

i. Montrer que y est dans $\mathrm{Im}(T^n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

ii. En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{E}_n$ est différent de $\mathbf{E}$.

C. Aspect probabiliste

On appelle Ω l'ensemble des suites de nombres réels appartenant à $[0,1]$.

Étant donnés un entier naturel n et deux suites finies de nombres réels $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ vérifiant pour tout j les inégalités $0 \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant 1$, on désigne par $K_{a,b}$ le pavé $K_{a,b} = \left\{x \in \mathbf{R}^{n+1},\ \forall j,\ \ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j\right\}$. Le volume de $K_{a,b}$ est par définition le réel $v(K_{a,b}) = \prod_{j=0}^{n}(b_j - a_j)$.

On associe à K la partie Ω_K de Ω définie par

$$\Omega_K = \{x = (x_k)_{k \geqslant 0}, \quad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K\}.$$

On admettra qu'il existe sur Ω une tribu contenant tous les Ω_K et sur cette tribu $\mathscr{B}$ une probabilité P telle que $P(\Omega_K) = v(K)$ pour tout pavé K.

On définit enfin, pour k entier naturel, la variable aléatoire réelle X_k, application de Ω dans $\mathbf{R}$, qui à $x = (x_i)_{i \geqslant 0}$ associe $X_k(x) = x_k$.

1. Montrer que $(X_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et identifier cette loi.
2. Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$.
   Calculer, pour $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$, $P\left(\{\omega \in \Omega |\ |X_j(\omega) - X_n(\omega)| < \varepsilon \text{ pour } j = n+1, n+2, \ldots, n+p\}\right)$.
3. En déduire que x diverge presque sûrement (on pourra admettre que l'ensemble $\{x \in \Omega \mid x \text{ converge }\}$ est dans la tribu $\mathscr{B}$).
4. En utilisant un théorème du programme, montrer que Tx converge presque sûrement.

4.2.2 Corrigé de la deuxième épreuve écrite

Questions préliminaires

1) Si pour tout k, on a $|x_k| \leqslant \mathrm{M}$, alors, pour tout $n \geqslant 0$, on a $|x_0 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant (n+1)\mathrm{M}$, d'où $|y_n| \leqslant \mathrm{M}$.

2) L'application T est visiblement linéaire. On a vu au 1) que, pour tout $x \in \mathbf{E}$, on a $\|\mathrm{T}x\| \leqslant \|x\|$. L'application T est donc continue et sa norme est $\leqslant 1$.

3) Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $|x_n - l| \leqslant \varepsilon$. Choisissons un tel entier n_0. Pour $n > n_0$, on a

$$y_n - l = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(x_k - l) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}(x_k - l) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}(x_k - l)\cdot$$

On pose $\mathrm{A}(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}(x_k - l)$ et $\mathrm{B}(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}(x_k - l)$. Lorsque n tend vers ∞, $\mathrm{A}(n)$ tend vers 0. Il existe donc un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que l'on ait $|\mathrm{A}(n)| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $n \geqslant n_1$. Par ailleurs, on a $|\mathrm{B}(n)| \leqslant \frac{1}{n+1}(n - n_0)\,\varepsilon \leqslant \varepsilon$. Donc, pour tout $n \geqslant n_1$, on a $|y_n - l| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui démontre le résultat.

Partie I : Exemples

A. Premiers exemples

1) Pour tout entier $k \geqslant 0$, comme $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, on a $y_k = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\exp(ij\theta) = \dfrac{e^{i(k+1)\theta} - 1}{(k+1)(e^{i\theta} - 1)}$ qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2) Pour $p \geqslant 1$ et pour $0 \leqslant j < n$, les entiers l, $0 \leqslant l \leqslant pn + j$, qui sont multiples de n, sont au nombre de $p+1$. On a donc

$$y_{pn+j} = \frac{p+1}{pn+j+1}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p+1}{(p+1)n} \leqslant y_{pn+j} \leqslant \frac{p+1}{pn+1}\cdot$$

Chacune des deux suites encadrant y_{pn+j} tend vers $1/n$ quand p tend vers $+\infty$; il en est donc de même de la suite (y_k).

3) Les deux exemples précédents montrent qu'il est possible que la suite $\mathrm{T}x$ ait une limite sans que la suite x en ait une.

4.a) (i) Supposons que la suite $x(t)$ ait une limite ℓ. Comme $x_k(t)$ et $x_{k+1}(t)$ tendent vers ℓ quand k tend vers $+\infty$, et comme l'application $x \mapsto (x-1)^2$ est continue, on a donc $\ell = (\ell - 1)^2$;

autrement dit, le nombre ℓ est racine du polynôme

$$\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1.$$

Les racines de ce polynôme sont t_0 et $1/t_0$. Comme la suite $x(t)$ est à valeurs dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, sa limite ℓ appartient à cet intervalle. La valeur numérique donnée montre que t_0 appartient à cet intervalle et que $1/t_0$ n'y appartient pas. On a donc nécessairement $\ell = t_0$.

(ii) Supposons $t \neq t_0$, et démontrons que $x_k(t)$ n'est égal à t_0 pour aucun entier $k \geqslant 0$. Remarquons d'abord que $x_0(t) \neq t_0$. Procédons alors par l'absurde, et supposons qu'il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $x_{k+1}(t) = t_0$. Soit k_0 le plus petit entier k tel que $x_{k+1}(t) = t_0$. On a alors $(x_{k_0}(t) - 1)^2 = t_0$, et, comme $(t_0 - 1)^2 = t_0$, on a $(x_{k_0}(t) - 1)^2 = (t_0 - 1)^2$. Comme $x_{k_0}(t) - 1$ et $t_0 - 1$ ont même signe (négatif), on a donc $x_{k_0}(t) - 1 = t_0 - 1$, d'où $x_{k_0}(t) = t_0$, ce qui est absurde par définition de k_0.

Pour tout entier $k \geqslant 0$, posons $x_k(t) = x_k$ et $z_k = x_k - t_0$. Par hypothèse, la suite (z_k) tend vers 0 mais ne s'annule jamais. Pour $u \in [0, 1]$, posons $h(u) = (u - 1)^2$. On a

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{x_{k+1} - t_0}{x_k - t_0} = \frac{h(x_k) - h(t_0)}{x_k - t_0}.$$

Lorsque k tend vers $+\infty$, x_k tend vers t_0, et $(h(x_k) - h(t_0))/(x_k - t_0)$ tend vers $h'(t_0)$. On a $h'(u) = 2(u - 1)$, d'où $h'(t_0) = -1 + \sqrt{5} \geqslant -1 + 2,2 = 1,2$.

(iii) Il existe un entier n tel que pour $k \geqslant n$, on ait $z_{k+1} \geqslant (1,1)z_k$. Ceci garantit que la suite (z_k) ne peut tendre vers 0 (en effet $z_{n+m} \geqslant (1,1)^m z_n$).

En supposant que la suite $x(t)$ (pour $t \neq t_0$) avait une limite, on a démontré que cette limite était nécessairement t_0, puis que $x_k(t)$ ne pouvait tendre vers t_0. Cette contradiction démontre que la suite $x(t)$ n'a pas de limite pour $t \neq t_0$. Remarquons que la suite $x(t_0)$ est constante, de valeur t_0.

4.b) (i) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$. La fonction $g = f \circ f$ est donc croissante sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$.

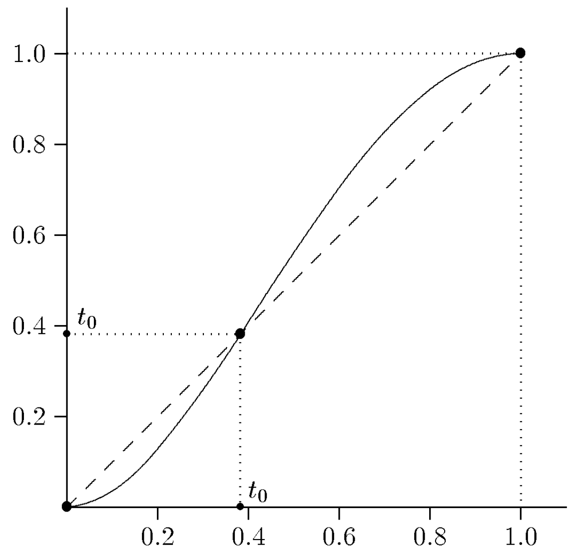
$$g(x) = f(f(x)) = ((x - 1)^2 - 1)^2 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$g(x) - x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x.$$

On peut remarquer les racines évidentes 0 et 1 de $g(x) - x$. On peut aussi remarquer que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, d'où $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Par ailleurs, on a vu plus haut que t_0 et $1/t_0$ sont les racines du polynôme $f(x) - x$. Ces deux nombres sont donc aussi des points fixes de g . Toutes ces raisons, ou d'autres, permettent la factorisation

$$g(x) - x = x(x-1)(x-t_0)(x-1/t_0).$$

x	0		t_0		1
$g(x)$	0	$\nearrow$	t_0	$\nearrow$	1
$g(x)-x$	0	$-$	0	$+$	0



Dans l'intervalle $[0,1]$, le graphe de la fonction g a 3 points d'intersection avec la première bissectrice, aux points d'abscisses 0 , t_0 et 1 . On a $g'(0) = g'(1) = 0$, $g'(t_0) = 4t_0 > 1$. L'inflexion n'est pas en t_0 , elle est au point d'abscisse $1 - 1/\sqrt{3}$ assez proche.

(ii) Chacune des suites $(x_{2k}(t))$ et $(x_{2k+1}(t))$ est une suite (z_k) définie par $z_0 = x_0(t)$ ou $z_0 = x_1(t)$, et $z_{k+1} = g(z_k)$.

Une telle suite est constante si z_0 est égal à 0 , t_0 ou 1 . Si z_0 est un point de l'intervalle $]0, t_0[$, la suite (z_k) est décroissante. Comme elle est positive, elle a une limite, qui est nécessairement le point fixe 0 de la fonction g . De même, pour $z_0 \in]0, 1[$, la suite z_k est croissante et tend vers 1 .
Dans tous les cas, la suite (z_k) est convergente.

On en déduit que

a) si $t = t_0$, la suite $x(t)$ est constante égale à t_0 ,

b) si $0 \leqslant t < t_0$, la suite $(x_{2k}(t))$ tend vers 0 , et la suite $(x_{2k+1}(t))$ tend vers 1 ,

c) si $t_0 < t \leqslant 1$, la suite $(x_{2k}(t))$ tend vers 1, et la suite $(x_{2k+1}(t))$ tend vers 0.

Dans le cas où $t = t_0$, la suite $x(t)$ est constante, la suite $y(t)$ aussi.

Supposons $t \neq t_0$, et posons $x'_k = x_{2k}(t)$, $x''_k = x_{2k+1}(t)$. On a

$$y_{2k}(t) = \frac{1}{2k+1}\sum_{j=0}^{j=k} x_{2j}(t) + \frac{1}{2k+1}\sum_{j=0}^{j=k-1} x_{2j+1}(t) = \frac{k+1}{2k+1}(\mathrm{T}x')_k + \frac{k}{2k+1}(\mathrm{T}x'')_{k-1}.$$

D'après la discussion ci-dessus et la question préliminaire 3), $(\mathrm{T}x'_k)$ tend vers 0 et $(\mathrm{T}x'')_{k-1}$ tend vers 1, ou l'inverse. Dans les deux cas, $y_{2k}(t)$ tend vers $1/2$. On raisonne de même pour $y_{2k+1}(t)$, et on en déduit que la suite $y(t)$ a pour limite $1/2$.

(iii) Les fonctions $x_k(t)$ sont polynomiales en t, il en est de même des fonctions $y_k(t)$. Elles sont donc continues. D'après (ii) ci-dessus, leur limite est discontinue au point t_0 : c'est la fonction égale à t_0 en t_0 et à $1/2$ ailleurs. La convergence de la suite $y(t)$ ne peut donc pas être uniforme sur $[0,1]$.

B. Une remarque

1) On a

$$y_k - y_{k-1} = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\sum_{j=0}^{k-1} x_j + \frac{x_k}{k+1},$$

$$|y_k - y_{k-1}| \leqslant \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=0}^{k-1} \|x\| + \frac{\|x\|}{k+1},$$

$$|y_k - y_{k-1}| \leqslant \frac{k\|x\|}{k(k+1)} + \frac{\|x\|}{k+1} = \frac{2\|x\|}{k+1}.$$

2) Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite y. Raisonnons par l'absurde, et supposons que l'ensemble A ne soit pas un intervalle de $\mathbf{R}$. Alors l'ensemble A n'est pas connexe. Il existe donc un point a de $\mathbf{R}$, n'appartenant pas à A et tel que l'ensemble A rencontre les deux intervalles ouverts $]-\infty, a[$ et $]a, \infty[$. Par ailleurs, l'ensemble A est fermé dans $\mathbf{R}$. Il existe donc un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]a - 2\varepsilon, a + 2\varepsilon[$ soit disjoint de l'ensemble A.

Soit k_0 un entier tel que $\frac{2\|x\|}{k_0+1} < \varepsilon$, ou encore $k_0 + 1 > 2\|x\|/\varepsilon$. Comme la suite y a au moins une valeur d'adhérence dans $\mathrm{A} \cap]-\infty, a - 2\varepsilon]$, il existe une infinité d'indices $k \geqslant k_0$ pour lesquels $y_k \leqslant a - \varepsilon$. De même, il existe une infinité d'indices $k \geqslant k_0$ pour lesquels $y_k \geqslant a + \varepsilon$. Comme la distance de deux termes consécutifs y_k, y_{k+1}, avec $k \geqslant k_0$, est $\leqslant \varepsilon$, il existe une infinité de termes de la suite dans l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Par suite, cet intervalle compact contient une valeur d'adhérence de la suite, contrairement à l'hypothèse. Le résultat est donc démontré.

C. Suites à valeurs dans $\{0,1\}$

1)

$$\frac{u_p}{p!} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)(p-2)} + \cdots + \frac{1}{p(p-1)\dots 3} + \frac{1}{p!}.$$

Les $p-2$ derniers termes sont inférieurs à $1/p(p-1)$, donc

$$0 \leqslant \frac{u_p}{p!} - 1 \leqslant \frac{1}{p} + \frac{p-2}{p(p-1)}.$$

Il en résulte que $u_p/p!$ tend vers 1, ou encore que $u_p \sim p!$ lorsque p tend vers ∞. On démontre de façon analogue que v_p est équivalent à $(2p-1)!$.

On a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 9$, $u_4 = 33$, $j(0) = 0$, $j(k) = 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2$, $j(k) = 2$ pour $3 \leqslant k \leqslant 8$, $j(k) = 3$ pour $9 \leqslant k \leqslant 32$. D'où $x = 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0 \cdots$ $(24$ fois).

2) Supposons $k = u_p$, alors $j(k) = p$. Si $p = 2q$ ou $p = 2q-1$, alors

$$y_k = \frac{1}{k+1}\big(1! + 3! + 5! + \ldots + (2q-1)!\big) = \frac{v_q}{u_p+1}.$$

3) Lorsque $p = 2q$, d'après la question 1), on a donc $y_k \sim \dfrac{(2q-1)!}{(2q)!} \sim \dfrac{1}{2q}$ qui tend vers 0.

Lorsque $p = 2q-1$, on a $y_k \sim \dfrac{(2q-1)!}{(2q-1)!}$ et y_k tend vers 1.

Ainsi les nombres 0 et 1 sont des valeurs d'adhérence de la suite y. D'après la question B.2), tout point de l'intervalle $[0,1]$ est valeur d'adhérence de cette suite. Il n'y en a pas d'autre puisque les suites x et y ont leurs valeurs comprises entre 0 et 1.

La suite x ne prend que les valeurs 0 et 1, ceci une infinité de fois. Ses valeurs d'adhérence sont les seules valeurs 0 et 1 .

4.a) Soient k et p des entiers $\geqslant 0$; notons $\mathrm{A}(k,p)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que

$$\mathrm{X}_k(\omega) = \mathrm{X}_{k+1}(\omega) = \ldots = \mathrm{X}_{k+p}(\omega) = 0.$$

Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes, on a $\mathrm{P}(\mathrm{A}(k,p)) = (1/2)^{p+1}$. L'ensemble $\mathrm{A}(k)$ des $\omega \in \Omega$ tels que $\mathrm{X}_i(\omega) = 0$ pour $i \geqslant k$ est l'intersection de la famille des $\mathrm{A}(k,p)$, $p \geqslant 0$. On a donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}(k)) \leqslant (1/2)^{p+1}$ pour tout $p \geqslant 0$, donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}(k)) = 0$.

4.b) Chaque variable aléatoire X_i ne prend que les valeurs 0 ou 1. Soit $\omega \in \Omega$; si la suite $(\mathrm{X}_i(\omega))$ a une limite, ce ne peut être que 0 ou 1. Dire que la suite $\mathrm{X}_i(\omega)$ tend vers 0, c'est dire que $\mathrm{X}_i(\omega) = 0$ pour i assez grand, ou encore que ω appartient à la réunion A de la famille des $\mathrm{A}(k)$, $k \geqslant 0$. On a vu que $\mathrm{P}(\mathrm{A}(k)) = 0$ pour tout entier k, donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$. Cela signifie que la suite (X_i) ne tend presque sûrement pas vers 0. De même, elle ne tend presque sûrement pas vers 1. D'où le résultat demandé.

4.c) C'est la loi forte des grands nombres. Presque sûrement la suite (Y_k) tend vers $1/2$, espérance des X_k.

Partie II : Étude de l'endomorphisme T

A. Généralités

1) Soient $x \in \mathcal{E}$ et $y = \mathcal{T}x$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, les $n+1$ premiers termes de la suite y sont donnés par les relations

$$(\mathrm{Y}_n) \quad \begin{cases} y_0 &= x_0 \\ y_1 &= x_0/2 + x_1/2 \\ \dots &= \dots + \dots + \dots \\ y_n &= x_0/(n+1)) + x_1/(n+1) + \dots + x_n/(n+1) \end{cases}$$

Inversement, si les termes y_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, de la suite y sont donnés, les termes x_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, de la suite x sont fournis de façon unique par le système (Y_n) qui est triangulaire sans zéro sur la diagonale. Il en résulte que l'application $\mathcal{T}$ est un automorphisme linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

2) Pour $x \in \mathcal{E}$, posons $z = \mathcal{T}x - \lambda x$. Comme ci-dessus, les $n+1$ premiers termes de la suite z sont donnés par les relations

$$(\mathrm{Z}_n) \quad \begin{cases} z_0 &= x_0(1-\lambda) \\ z_1 &= x_0/2 + x_1(\frac{1}{2} - \lambda) \\ \dots &= \dots + \dots + \dots \\ z_n &= x_0/(n+1) + x_1/(n+1) + \dots + x_n(\frac{1}{n+1} - \lambda) \end{cases}$$

Si λ n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{A}$, la diagonale du système (Z_n) n'a pas de zéro, et l'endomorphisme $\mathcal{T} - \lambda \mathrm{I}_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme, comme dans la question précédente.

Supposons $\lambda = 1/n+1$. Le système (Z_n) a pour rang n, donc ses "seconds" membres sont liés par une relation non triviale, et l'endomorphisme $\mathcal{T} - \lambda \mathrm{I}_{\mathcal{E}}$ n'est pas surjectif. On peut aussi dire, plus précisément, qu'une suite z telle que $z_0 = z_1 = \ldots = z_{n-1} = 0$ et $z_n \neq 0$ ne peut être dans l'image de l'endomorphisme $\mathcal{T} - \lambda \mathrm{I}_{\mathcal{E}}$.

Supposons maintenant $\lambda = 1/k + 1$, où $0 \leqslant k < n$, et cherchons une suite x telle que $\mathcal{T}x - \lambda x = 0$, en résolvant le système (Z_n) avec des zéros pour seconds membres. Imposons-nous $x_0 = \ldots = x_{k-1} = 0$ et $x_k = 1$. Les $k+1$ premières équations sont satisfaites. Les $n-k$ équations restantes forment un système de rang $n-k$ aux $n-k$ inconues $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Elles permettent donc de trouver, en faisant croître l'entier n, une suite $x \neq 0$ telle que $\mathcal{T}x - \lambda x = 0$. L'endomorphisme $\mathcal{T} - \lambda \mathrm{I}_{\mathcal{E}}$ n'est pas injectif.

3) Soit $y \in \mathbf{E}$ une suite bornée, et soit $x \in \mathcal{E}$ l'unique suite telle que $y = \mathcal{T}x$ (question 1)). Pour $k \geqslant 1$, on a

$$(k+1)y_k - ky_{k-1} = (x_0 + x_1 + \ldots + x_k) - (x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1}) = x_k.$$

Pour que la suite x soit bornée, il faut et il suffit que la suite des $((k+1)y_k - ky_{k-1})$ soit bornée.

4) L'application linéaire T est injective puisqu'elle se déduit par restriction de l'application linéaire $\mathcal{T}$ qui est injective (question 1)). Elle n'est pas surjective : la suite y définie par $y_k = (-1)^k$ est bornée, mais ne satisfait pas à la condition de la question 3).

B. Quelques suites auxiliaires

1) C'est immédiat par récurrence sur l'entier $k \geqslant 0$.

2) Lorsque k tend vers ∞, on a

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \Big(1 + \frac{a+ib}{k}\Big)^{-1} = 1 - \frac{a+ib}{k} + \mathrm{O}(1/k^2),$$

$$\Big|1 - \frac{a+ib}{k}\Big|^2 = \Big(1 - \frac{a+ib}{k}\Big)\Big(1 - \frac{a-ib}{k}\Big) = 1 - \frac{2a}{k} + \mathrm{O}(1/k^2),$$

d'où $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| = -\dfrac{a}{k} + \mathrm{O}(1/k^2)$.

3) Supposons $a < 0$. La série de terme général $-a/k$ est divergente et ses termes sont positifs. D'après un théorème de comparaison et la question 2), $\sum_{k=0}^{n} \ln \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k-1}|}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, Par suite $\ln \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_0|}$ tend vers $+\infty$, et donc aussi $|\alpha_n|$.

4) Supposons $a > 0$. D'après la question 2), $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| = -a/k + u_k$, où la série $\sum |u_k|$ est convergente (car la série $\sum 1/k^2$ est convergente). Donc

$$\ln|\alpha_n| - \ln|\alpha_0| = -a\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} u_k = -a(\ln n + \gamma) + \sum_{k=1}^{n} u_k + \mathrm{O}(1/n).$$

Lorsque n tend vers l'infini, le terme $\mathrm{O}(1/n)$ tend vers 0, le terme $\sum_{k=1}^{n} u_k$ tend vers la somme U de la série, donc $\ln|\alpha_n| + a\ln n$ tend vers $\mathrm{C} = \ln|\alpha_0| - a\gamma + \mathrm{U}$, et $|\alpha_n|n^a$ tend vers e^{C}. D'où le résultat avec $\mathrm{A}_1 = e^{\mathrm{C}}$.

5) a) Posons $u_j = 1/j|\alpha_{j-1}|$. D'après la question précédente, u_j est équivalent à $1/\mathrm{A}_1 j^{1-a}$ quand j tend vers ∞. Il existe donc un nombre réel M tel que $0 \leqslant u_j \leqslant \mathrm{M}j^{a-1}$.

Si $a = 1$, $\sum_{j=1}^{k} j^{a-1} = k = \mathrm{O}(k)$,

si $a > 1$, $\sum_{j=1}^{k} j^{a-1} \leqslant \int_1^{k+1} x^{a-1}\mathrm{dx} = \mathrm{O}(k^a)$,

si $0 < a < 1$, $\sum_{j=2}^{k} j^{a-1} \leqslant \int_0^{k} x^{a-1}\mathrm{dx} = \mathrm{O}(k^a)$.

D'où le résultat.

b) D'après (a) et 5), la suite (U_k) est bornée.

6) $\dfrac{1}{\alpha_j} - \dfrac{1}{\alpha_{j-1}} = \dfrac{1}{\alpha_{j-1}}\Big(1 + \Big(1 - \dfrac{1}{\lambda}\Big)\dfrac{1}{j}\Big) - \dfrac{1}{\alpha_{j-1}} = \Big(1 - \dfrac{1}{\lambda}\Big)\dfrac{1}{j\alpha_{j-1}}$.

On a donc $|\mathrm{V}_k| \leqslant |1 - 1/\lambda|\,\mathrm{U}_k$, et la suite $|\alpha_k|\mathrm{V}_k$ est bornée d'après la question 5).

C. Détermination du spectre de T

1) Le spectre $\sigma(\mathrm{T})$ contient 0 car T n'est pas surjectif (question A.4). Le spectres $\sigma(\mathrm{T})$ contient 1 car $\mathrm{T} - \mathrm{I}_{\mathbf{E}}$ n'est pas injectif : en effet, si x est une suite constante (non nulle), on a $\mathrm{T}x = x$.

2) Cela résulte de l'élimination de $x_0 + \ldots + x_{k-2}$ entre les relations donnant y_{k-1} et y_k

3)(a) En utilisant la question 2), on reconnaît que la suite x n'est autre que la suite α.

(b) Si $a = \mathrm{Re}\,(1 - 1/\lambda) < 0$, on a vu à la question B.3) que la suite (α_k) n'est pas bornée. La suite x, qui n'est pas dans $\mathbf{E}$, est l'unique suite dans $\mathcal{E}$ telle que $\mathrm{T}x - \lambda x = y$, donc la suite y n'est pas dans $(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}_{\mathbf{E}})(\mathbf{E})$. L'endomorphisme $\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}_{\mathbf{E}}$ n'est pas surjectif et λ appartient au spectre $\sigma(\mathrm{T})$.

4) On suppose $\mathrm{Re}\,(1 - 1/\lambda) > 0$.

(a) La première relation résulte de la division de (**) par (*) ($\alpha_k \neq 0$). Si on ajoute ces relations pour k allant de 1 à K, on trouve

$$\frac{x_{\mathrm{K}}}{\alpha_{\mathrm{K}}} - \frac{x_0}{\alpha_0} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \frac{y_{k-1} - y_k}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \frac{y_k}{k\alpha_{k-1}}\Big)$$

ce qui donne la deuxième relation, en tenant compte de $x_0 = \alpha_0 y_0$.

(b) La relation indiquée résulte d'une transformation du type Abel. Comme $a = \mathrm{Re}\,(1 - 1/\lambda) > 0$, on peut appliquer les questions B.4) 5) et 6).

$$x_k = \alpha_k y_0 + \frac{\alpha_k}{\lambda}\sum_{j=1}^{k} y_j\Big(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\Big) + \frac{\alpha_k}{\lambda}\Big(\frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k}\Big) - \frac{\alpha_k}{\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{k} \frac{y_j}{k\alpha_{j-1}}\Big),$$

d'où

$$|x_k| \leqslant \|y\| \frac{|\alpha_k|}{|\lambda|}\Big(|\lambda| + \mathrm{V}_{k+1} + \frac{1}{|\alpha_0|} + \frac{1}{|\alpha_k|} + \mathrm{U}_k\Big).$$

La majoration demandée résulte alors de celles des questions B.4), 5) et 6) et du fait que α_k/α_{k+1} tend vers 1.

5) On a donc prouvé que, pour λ n'appartenant pas à l'ensemble $\mathcal{A}$ des $\frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbf{N}$,

si $\mathrm{Re}\,(1 - 1/\lambda) < 0$, alors $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$ (question 3)),

si $\mathrm{Re}\,(1 - 1/\lambda) > 0$, alors $\lambda \notin \sigma(\mathrm{T})$ (question 4) : en effet la suite x est bornée donc la suite y a un antécédent dans $\mathbf{E}$ par $(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}_{\mathbf{E}})$).

Déterminons l'ensemble des nombres $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $\mathrm{Re}\,(1 - 1/\lambda) < 0$.

Posons $\lambda = x + iy$; on a

$$1 - \frac{1}{x+iy} = 1 - \frac{x - iy}{x^2+y^2} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Re}\Big(1 - \frac{1}{x+iy}\Big) = \frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2}\cdot$$

L'équation $x^2 + y^2 - x = 0$ est celle du cercle C de diamètre le segment $[0, 1]$. Les points extérieurs au cercle C ne sont pas dans le spectre. Les points intérieurs au cercle C, sauf éventuellement ceux de l'ensemble $\mathcal{A}$, appartiennent au spectre. Par ailleurs, l'énoncé dit que le spectre est fermé dans $\mathbf{C}$. Finalement, le spectre de T est le disque fermé de diamètre le segment $[0, 1]$.

Partie III : Propriétés régularisantes de T

A. Convergence simple

1) Comme $|\alpha| < 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha^n$ est convergente et a pour somme $1/(1-\alpha)$. On procède alors comme dans la question 3) du Préliminaire. Soient n et p des entiers $\geqslant 0$; alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+p} \alpha^j a_{n+p-j} - \frac{\ell}{1-\alpha} &= \sum_{j=0}^{n} \alpha^j (a_{n+p-j} - \ell) + \sum_{j=n+1}^{n+p} \alpha^j (a_{n+p-j} - \ell) + \frac{\ell\, \alpha^{n+p+1}}{1-\alpha},\\ &= \sum_{j=0}^{n} \alpha^j (a_{n+p-j} - \ell) + \alpha^n \sum_{j=1}^{p} \alpha^j (a_{p-j} - \ell) + \frac{\ell\, \alpha^{n+p+1}}{1-\alpha}\cdot\end{aligned}$$

Soit ε un nombre réel > 0 ; par hypothèse, il existe un entier P tel que l'on ait $|a_k - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $k \geqslant \mathrm{P}$. Pour $p \geqslant \mathrm{P}$, on a donc

$$\Big|\sum_{j=0}^{n+p} \alpha^j a_{n+p-j} - \frac{\ell}{1-\alpha}\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-|\alpha|} + |\alpha|^n\, p\, \|a - \ell\| + \frac{|\ell|\, |\alpha|^{n+p+1}}{|1-\alpha|}\cdot$$

Fixons un tel entier p. Comme $|\alpha| < 1$, la suite (α^k) tend vers 0. Il existe donc un entier N tel que, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait

$$|\alpha|^n\, p\, \|a - \ell\| + \frac{|\ell|\, |\alpha|^{n+p+1}}{|1-\alpha|} \leqslant \varepsilon,$$

$$\text{d'où} \qquad \Big|\sum_{j=0}^{n+p} \alpha^j a_{n+p-j} - \frac{\ell}{1-\alpha}\Big| \leqslant \varepsilon\, \Big(\frac{1}{1-|\alpha|} + 1\Big).$$

Ceci prouve que la suite u a pour limite $\ell/(1-\alpha)$.

2) On a $v_1 = \alpha v_0 + w_0$, $v_2 = \alpha^2 v_0 + \alpha w_0 + w_1$, $v_3 = \alpha^3 v_0 + \alpha^2 w_0 + \alpha w_1 + w_2$.

Par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$, on démontre l'égalité

$$v_{n+1} = \alpha^{n+1} v_0 + \sum_{j=0}^{n} w_{n-j} \alpha^j.$$

Le premier terme tend vers 0, le second vers $\ell/1-\alpha$ d'après la question précédente.

3) (a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $x_0^{(n)} = x_0 = a$, suite constante qui tend vers a.

(b) $\quad x_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1,$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}\Big(x_0 + \Big(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\Big)\Big) = \Big(1 - \frac{1}{2^2}\Big)\, a + \frac{1}{2^2}\, b, \quad \ldots$$

$$x_1^{(n)} = \frac{1}{2}\big(x_0^{(n-1)} + x_1^{(n-1)}\big) = \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)\, a + \frac{1}{2^n}\, b.$$

Donc $x_1^{(n)}$ tend vers a quand n tend vers ∞.

(c) C'est la définition de $x^{(n+1)} = \mathrm{T}x^{(n)}$.

(d) Procédons par récurrence. Soit k un entier $\geqslant 1$; supposons démontré que, pour $0 \leqslant j \leqslant k$, la suite $x_j^{(n)}$ tend vers a quand n tend vers l'infini. Posons $v_n = x_{k+1}^{(n)}$ et $w_n = \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k} x_j^{(n)}$; on a alors

$$v_{n+1} = \frac{1}{k+2}\, v_n + w_n.$$

On applique alors la question 2) avec $\alpha = 1/(k+2)$. D'après l'hypothèse de récurrence, w_n tend vers $\frac{k+1}{k+2}\, a$. Par suite v_n tend vers $\dfrac{k+1}{k+2}\, \dfrac{1}{1 - \frac{1}{k+2}}\, a$, c'est-à-dire vers a.

On a ainsi démontré que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $x_k^{(n)}$ tend vers a quand n tend vers l'infini.

4) Soit x une suite bornée. Supposons que la suite $(x^{(n)})_{n \geqslant 0}$ ait une limite z dans $\mathbf{E}$. Cela signifie que $x_k^{(n)}$ tend vers z_k, uniformément pour $k \geqslant 0$ quand n tend vers l'infini. Dans la question précédente, on a démontré que $x_k^{(n)}$ tend simplement vers a. Nécessairement, la suite z est la suite constante de valeur a.

5) Soit toujours x une suite bornée. Si la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ a une limite c dans $\mathbf{C}$, il en est de même pour toutes les suites $x^{(n)}$ (Préliminaire 3). Il en résulte que, pour tout n, on a $||x^{(n)}|| \geqslant c > 0$. La suite $x^{(n)}$ ne peut donc converger (dans $\mathbf{E}$) vers 0 qui est la seule limite éventuelle d'après la question 4).

B. Lissage : un résultat négatif

1) (a) La translation de vecteur $-x_0$ laisse stable l'espace vectoriel G et transforme la boule de centre x_0, de rayon ε, en la boule de centre 0, de même rayon, contenue dans G.

(b) Notons B cette boule. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{F}$; le vecteur $y = x\frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ appartient à la boule B, donc à G. Par suite $x = y\frac{2\|x\|}{\varepsilon}$ appartient à G, ce qui prouve que $\mathrm{G} = \mathbf{F}$.

2) (a) Rappelons que $\mathbf{E}_c$ désigne l'espace vectoriel des suites convergentes, sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbf{E}$ des suites bornées de nombres complexes. On sait qu'une limite uniforme de suites numériques convergentes est convergente, autrement dit que l'espace $\mathbf{E}_c$ est fermé dans $\mathbf{E}$.

(b) Puisque l'endomorphisme T^n de $\mathbf{E}$ est continu (Préliminaire 1) et que $\mathbf{E}_c$ est fermé dans $\mathbf{E}$, l'espace $\mathbf{E}_n = (\mathrm{T}^n)^{-1}(\mathbf{E}_c)$ est aussi fermé dans $\mathbf{E}$. Si l'on admet que $\mathbf{E}_n \neq \mathbf{E}$, d'après la question 1), l'espace $\mathbf{E}_n$ a un intérieur vide dans $\mathbf{E}$. D'après le théorème admis (théorème de Baire), la réunion $\cup_{n\geqslant 0}\mathbf{E}_n$ a aussi un intérieur vide dans $\mathbf{E}$. Le complémentaire de cette réunion (qui est l'ensemble décrit dans la question) est dense dans $\mathbf{E}$.

3) (a) Posons $h(t) = (t+1)f(t)$; on a alors $g(t) = h(t) - h(t-1)$.

Pour $t \geqslant t_1$, $j \leqslant n$, on a, par l'hypothèse (H_n),

$$|h^{(j)}(t)| = |(t+1)f^{(j)}(t) + jf^{(j-1)}(t)| \leqslant \frac{(t+1)\mathrm{M}_j}{t^j} + j\mathrm{M}_{j-1}t^{j-1}.$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $h^{(j-1)}$

$$g^{(j-1)}(t) = |h^{(j-1)}(t) - h^{(j-1)}(t-1)| \leqslant \max_{u\in[t-1,t]} |h^{(j)}(u)|.$$

Par suite, pour $t > t_1 + 1$, $j \leqslant n$, on a

$$|g^{(j-1)}(t)| \leqslant \frac{\mathrm{M}_j + j\mathrm{M}_{j-1}}{(t-1)^{j-1}} + \frac{\mathrm{M}_j}{(t-1)^j}.$$

Posons $\alpha_j(t) = \dfrac{\mathrm{M}_j + j\mathrm{M}_{j-1}}{(t-1)^{j-1}} + \dfrac{\mathrm{M}_j}{(t-1)^j}.$

Comme $\alpha_j(t)t^{j-1}$ a une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$, il existe un nombre réel M'_j tel que pour tout $t \geqslant t_1 + 1$, on ait

$$|g^{(j-1)}(t)| \leqslant \frac{\mathrm{M}'_j}{t^j},$$

ce qui veut dire que g satisfait à la condition (H_{n-1}).

(b) Procédons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$. Soit $x \in \mathcal{E}$ l'unique suite telle que $y = \mathcal{T}x$ (question II.A.1). Des relations

$$k\, y_{k-1} = x_0 + \ldots + x_{k-1}, \qquad (k+1)\, y_k = x_0 + \ldots + x_k,$$

on déduit la relation (déjà vue en II.A.3)

$$x_k = (k+1)\, y_k - k\, y_{k-1}.$$

Avec les notations du (a), comme $y_k = f(k)$, on a $x_k = g(k)$, où g satisfait à l'hypothèse (H_{n-1}) pour un certain t_0. Par l'hypothèse de récurrence, $x = \mathrm{T}^{n-1}z$, où $z_k = h(k)$, la fonction h satisfaisant à l'hypothèse (H_0) pour un certain autre t_0. Cette hypothèse (H_0) entraîne que la suite z est bornée. On a ainsi démontré que $y = \mathrm{T}^n z$, où $z \in \mathbf{E}$.

(c) (i) La fonction f définie par $f(t) = \exp(i \ln(1+t))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a $f'(t) = \frac{i}{t+1} f(t)$, ce qui s'écrit aussi

$$(t+1) f'(t) = i f(t).$$

On en déduit

$$(t+1) f^{(n+1)}(t) + n f^{(n)}(t) = i f^{(n)}(t).$$

Ainsi pour tout j, pour tout $t > 0$,

$$|f^{(j+1)}(t)| \leqslant (j+1) \frac{|f^{(j)}(t)|}{t},$$

ce qui permet de prouver que f satisfait à la condition (H_n) pour tout entier n.

D'après la question 3.b), la suite y est dans l'image de T^n pour tout entier $n \geqslant 0$.

(ii) La suite y appartient à $\mathbf{E}$. On voit facilement qu'elle n'a pas de limite dans $\mathbf{C}$. D'après (i), pour tout $n \geqslant 0$, il existe une suite $x \in \mathbf{E}$ telle que $\mathrm{T}^n x$ (à savoir y) ne soit pas une suite convergente. Autrement dit, la suite x n'appartient pas à $\mathbf{E}_n$, et $\mathbf{E}_n \neq \mathbf{E}$.

C. Aspect probabiliste

1) On a, d'après les propriétés admises de la probabilité P,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_0 \in [a_0, b_0], \mathrm{X}_1 \in [a_1, b_1], \ldots, \mathrm{X}_k \in [a_k, b_k]) = \prod_{j=0}^{k} (b_j - a_j).$$

Comme la tribu engendrée par les intervalles $[a, b]$ est la tribu borélienne de $[0, 1]$, on a aussi, pour toute suite $(A_0, \dots, A_k)$ d'ensembles boréliens de $[0, 1]$,

$$P(X_i \in A_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, k) = \prod_{i=0}^{k} P(X_i \in A_i).$$

Ceci est une caractérisation possible de l'indépendance des variables aléatoires X_i. Ces variables aléatoires ont toutes la même loi qui est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

2) Il s'agit de calculer le volume de l'ensemble $V_p(\varepsilon)$ des points $(y, x_1, \dots, x_p)$ de $[0, 1]^{p+1}$ tels que $|y - x_i| \leqslant \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, p$. Pour $y \in [0, 1]$, notons $W(y)$ l'ensemble des points $(x_1, \dots, x_p)$ de $[0, 1]^p$ tels que $|y - x_i| \leqslant \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, p$. On a donc

$$\nu(V_p(\varepsilon)) = \int_0^1 \nu(W(y)) \, dy.$$

Le calcul de $\nu(W(y))$ n'est pas le même selon que ε est plus grand ou plus petit que $1/2$. Supposons ici $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1/2$. On a

$$\begin{aligned} \nu(W(y)) &= (y + \varepsilon)^p \quad \text{pour } 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon, \\ &= \varepsilon^p \quad \text{pour } \varepsilon \leqslant y \leqslant 1 - \varepsilon, \\ &= (1 - y + \varepsilon)^p \quad \text{pour } 1 - \varepsilon \leqslant y \leqslant 1. \end{aligned}$$

On fait alors les calculs suivants :

$$\int_0^{\varepsilon} (y + \varepsilon)^p \, dy = \Big[\frac{(y + \varepsilon)^{p+1}}{p + 1}\Big]_0^{\varepsilon} = \frac{(2\varepsilon)^{p+1}}{p + 1} - \frac{(\varepsilon)^{p+1}}{p + 1},$$
$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \varepsilon^p \, dy = (1 - 2\varepsilon) \, \varepsilon^p,$$
$$\int_{1-\varepsilon}^{1} (1 - y + \varepsilon)^p \, dy = \Big[-\frac{(1 - y + \varepsilon)^{p+1}}{p + 1}\Big]_{1-\varepsilon}^{1} = \frac{(2\varepsilon)^{p+1}}{p + 1} - \frac{(\varepsilon)^{p+1}}{p + 1}.$$

D'où finalement, pour $0 \leqslant y \leqslant 1/2$,

$$\nu(V_p(\varepsilon)) = (1 - 2\varepsilon) \, \varepsilon^p + 2 \, \frac{(2\varepsilon)^{p+1}}{p + 1} - 2 \, \frac{(\varepsilon)^{p+1}}{p + 1}.$$

Comme $0 \leqslant \varepsilon < 1$, lorsque p tend vers l'infini, $\nu(V_p(\varepsilon))$ tend vers 0. On en déduit, par passage à la limite décroissante, que, pour tout entier n,

$$P(\{x \in \Omega \mid |X_{n+j} - X_n| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } j \geqslant 1\}) = 0.$$

Puis, par passage à la réunion croissante, on a

$$P(\{x \in \Omega \mid \exists n \geqslant 0 \text{ tel que } \forall j \geqslant 1, \ |X_{n+j} - X_n| \leqslant \varepsilon)\}) = 0.$$

Autrement dit, presque aucune suite x de Ω n'a la propriété de Cauchy.

4) Pourtant, pour presque toute suite x de Ω, la suite $\mathrm{T}x$ est convergente et a pour limite $1/2$ qui est l'espérance de la loi uniforme sur $[0,1]$: c'est la loi forte des grands nombres.

4.2.3 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite

Cette deuxième épreuve étudie quelques aspects de la transformation $\mathcal{T}$ qui, à une suite de nombres complexes, associe la suite de ses moyennes de Cesaro. Une assez longue première partie est consacrée à des exemples de suites à valeurs dans [0,1]. Les connaissances suffisantes pour traiter cette première partie, sauf la section B, sont des connaissances de base en analyse. La suite du problème est partagée en une partie II assez technique, dont l'objectif est la détermination du spectre de T, et une partie plus conceptuelle qui oppose les points de vue probabiliste et topologique quant à l'aspect régularisant de T. La majorité des candidats a traité les parties (I.A), (I.C), les généralités algébriques de la partie II et quelques préliminaires de la partie III.

Les copies vides ont été rares, mais seules les quelques très bonnes copies ont abordé des questions substantielles des parties II et III. Ces quelques dizaines de copies très honorables sont bien rédigées et manifestent un réel savoir faire en analyse. Les commentaires qui suivent sont évidemment critiques à l'endroit des erreurs les plus fréquemment rencontrées par les correcteurs dans l'ensemble des copies. Les quelques points techniques que nous allons maintenant mentionner doivent attirer l'attention des futurs candidats sur la nécessité de bien réfléchir quand il s'agit de répondre à une question de mathématique. Ce relevé de fautes répandues, sur des points parfois délicats, mais aussi à propos de questions d'apparence anodine, montre que, sans relecture critique, il est toujours possible d'écrire des mathématiques incongrues.

Préliminaires : une preuve correcte du lemme de Cesaro n'a été donnée que par une petite majorité de candidats ; comme dans d'autres questions, les majorations sont fréquemment peu scrupuleuses. Il s'agit cependant ici pratiquement d'une question de cours, et le raisonnement de passage à la limite à l'aide d'un paramètre auxiliaire (n_0 dans le corrigé), est un raisonnement classique.

Question (I.A.2) : la suite $1\,0\,0\,0\,(n-1 \text{ fois})\,1\,0\,0\,0\,\ldots$ On a rarement vu une explication probante du fait que la suite (y_k) tend vers $1/n$: même les candidats qui ont une bonne idée (division euclidienne) négligent de préciser que le quotient tend vers l'infini et que le reste varie dans un ensemble fini.

Question (I.A.3) : peu de candidats remarquent la fausseté de la réciproque du lemme de Cesaro : certains estiment que l'endomorphisme induit par T sur $\mathbf{E}_c$ n'est pas surjectif (ce qui est exact mais pas encore démontré à ce stade).

Question (I.A.4) : c'est l'une des plus discriminantes (l'étude de ce point fixe répulsif s'est révélée difficile). Au (a), il convient de souligner que l'application qui à x associe $(x-1)^2$ est continue pour affirmer que $\ell = (\ell-1)^2$. Dans la démonstration de $x_k(t) \neq \ell$, il fallait éviter les affirmations du type : $x \neq y$ donc $x^2 \neq y^2$.

Pour une très grosse majorité des candidats, si la suite (x_k) tend vers ℓ , alors $((x_{k+1}-\ell)/(x_k-\ell))$ tend vers 1 (étonnante ignorance des suites géométriques, confirmée par la question sur $\exp(ik\theta)$ en (I.A.1)).

Au (b), le graphe, s'il est souvent correct, n'est pas toujours bien justifié : certains candidats font un tableau de 10 ou 15 valeurs de la fonction g, mais sont incapables d'expliquer la position du graphe par rapport à la première bissectrice.

A la fin de la question, dans certaines copies, la convergence est réputée n'être pas uniforme parce que la fonction limite n'est pas *constante* au lieu de *continue* (lapsus ou méconnaissance du théorème mis en défaut ?).

Question (I.C.1) : seules les meilleures copies évitent une erreur grossière du style : $u_p/p!$ est égal à 1 plus une somme de $(p-1)$ termes qui tendent vers 0, donc $u_p/p!$ tend vers 1 .

Question (I.C4) : la majorité des copies révèlent une méconnaissance certaine des formalismes fondamentaux du calcul des probabilités.

Partie (II.A) : la résolution de ces questions mérite un soin particulier. Par exemple, pour démontrer qu'un endomorphisme n'est pas injectif, une méthode convaincante est d'exhiber un vecteur non nul appartenant au noyau, et de démontrer effectivement qu'il appartient à ce noyau. Dans la discussion portant sur le paramètre λ, il est important de bien faire voir à quel moment joue l'hypothèse faite sur les valeurs interdites à λ.

Question (II.B.1 à 3) : ces questions ont souvent été mal rédigées La dernière était sans doute assez difficile, l'indication donnée ayant incité à croire qu'une somme de $\mathrm{O}(1/k^2)$ (somme pour k allant de 1 à n) pouvait être assimilée à un $\mathrm{O}(1/n)$.

Ces quelques commentaires confirment qu'il est toujours difficile de résoudre un problème d'agrégation. Les candidats ayant essentiellement été jugés sur la partie I de l'énoncé, les notes attribuées mesurent moins la capacité à traiter les questions difficiles, ou l'éventuelle étendue des connaissances, que la pertinence et la solidité des arguments développés. Les copies ayant une note supérieure à la moyenne sont le fait de candidats sérieux dont la rédaction est sûre et la réflexion suffisante pour éviter la plupart des erreurs citées précédemment.

En conclusion, et au risque de se répéter, le jury est moins impressionné par le nombre restreint des questions traitées en général, que par la faiblesse de l'expression (même s'il espérait davantage des questions portant sur les variables de Bernoulli ou sur les séries numériques). Il semble utile de rappeler que

- les symboles mathématiques ne sont pas des abréviations (le signe $\Leftrightarrow$ est à proscrire comme retour à la ligne),

- la position respective des quantificateurs a un sens (et on peut avoir intérêt à s'en passer, comme dans le corrigé, Préliminaire 2), utiliser « soit $\varepsilon > 0$ » au lieu de « pour tout $\varepsilon > 0$ » permet ensuite de fixer l'entier n_0),

- les calculs avec les nombres complexes obéissent à des lois (majorations plus facilement fantaisistes et logarithmes moins aisément manipulables).

Le fait qu'une proportion non négligeable (autour de la moitié) des candidats s'affranchissent de ces règles usuelles de communication pourrait inquiéter, s'agissant de professeurs. Le jury est conscient que faire découvrir puis comprendre (voire aimer) des mathématiques aux adolescents est une tâche difficile et qu'il est sans doute parfois opportun de ne pas s'encombrer d'un formalisme trop pointilleux. Néanmoins, il n'est pas convaincu qu'il faille oublier les vertus de l'exemplarité et les spécificités du discours scientifique.

Épreuves orales

5 Rapport sur les épreuves orales

5.1 Considérations générales

5.1.1 Session 2005

Le jury est cette année encore relativement satisfait de la prestation orale des candidats. Un résultat médiocre à la première épreuve écrite, épreuve de géométrie, a nécessité d'abaisser la barre d'admissibilité. Après les épreuves orales, la qualité des prestations a permis de pourvoir tous les postes offerts au concours d'agrégation. Pour le CAERPA, on observe une nette augmentation des candidats admis, même s'il n'a pas été possible de pourvoir tous les postes offerts.

5.1.2 Evolution du concours

Comme il avait été annoncé dans les rapports des précédentes sessions, le jury a décidé d'une certaine évolution des épreuves orales en introduisant, pour la première épreuve orale, des sujets plus larges que les sujets habituellement posés. L'introduction des leçons de synthèse entraîne bien entendu la suppression d'un certain nombre des leçons plus spécialisées qui sont actuellement proposées.

Ces sujets plus larges sont facilement identifiables dans les listes qui suivent. Ils doivent être traités dans les mêmes conditions que les autres sujets, c'est-à-dire que l'épreuve comprend bien trois parties (plan, développement, questions du jury) comme indiqué ci-dessous.

Le plan prendra plus la forme d'un exposé que d'une leçon. Ainsi, le candidat qui traite le sujet sur la trigonométrie pourra suivre cette notion dans les programmes de l'enseignement du second degré pour conclure sur les définitions rigoureuses utilisant les séries entières, ou bien suivre un processus inverse. Il n'est aucunement demandé aux candidats un exposé exhaustif de ces questions larges en quinze minutes. Il s'agit de valoriser l'expérience et la réflexion pédagogique des professeurs, au lieu de leur demander une leçon type sur un point précis du programme, ce qui conduit souvent au bachotage dans la préparation au concours.

Le développement devra répondre aux critères généraux indiqués ci-dessous. Ce doit être un développement rigoureux et significatif d'un point particulier cohérent avec le sujet.

Les thèmes de la seconde épreuve ne sont pas changés. Mais là encore, l'expérience et la compétence pédagogique doivent se valoriser dans la préparation d'une séance d'exercice.

Pour éviter toute confusion entre deux listes de sujets, nous ne donnons pas dans ce rapport la liste des sujets de la session 2005, mais seulement les projets de sujets de la session 2006. Il est bien entendu que cette liste n'a qu'un caractère indicatif et que cette liste n'engage pas formellement le jury de la session 2006.

5.1.3 Liste indicative des sujets prévus pour la session 2006

LEÇONS D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.

102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.

103 Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

104 Propriétés élémentaires liées à la notion de nombre premier.

105 PGCD, PPCM dans $\mathbf{Z}$, théorème de Bézout. Applications.

106 PGCD dans $K[X]$, où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.

107 Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.

108 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une application linéaire.

109 Formes linéaires, hyperplans, dualité (on pourra se limiter à des espaces vectoriels de dimension finie). Exemples.

110 Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, polynômes d'endomorphisme.

111 Changements de bases en algèbre linéaire (applications linéaires, formes bilinéaires...). Applications.

112 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.

113 Déterminants. Applications.

116 Groupe des homothéties et translations dans le plan affine. Applications.

118 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien ; cas des dimensions 2 et 3.

120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Applications.

122 Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien (dimension finie) et applications géométriques (les généralités sur les formes quadratiques seront supposées connues).

123 Applications géométriques des nombres complexes.

124 Similitudes planes directes, indirectes ; formes réduites.

125 Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.

126 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.

127 Géométrie du triangle. Relations métriques et trigonométriques.

128 Barycentres. Applications.

129 Orientation d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3, produit mixte, produit vectoriel, applications.

130 Droites et plans dans l'espace.

131 Projecteurs et symétries dans un espace affine de dimension finie.

132 Polygones réguliers dans le plan.

137 Cercles dans le plan affine euclidien.

138 Mouvements à accélération centrale.

139 Cinématique du point : vitesse, accélération. Exemples de mouvements.

140 Division euclidienne.

142 Utilisation de groupes en géométrie.

143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes. Racines, polynomes irréductibles, factorisation.

144 Rang en algèbre linéaire.

145 Utilisation de transformations en géométrie.

146 Coniques.

147 Courbes planes paramétrées.

148 Diverses notions d'angle et leurs utilisations.

149 Équations et géométrie.

150 Factorisation de matrices. Cas des matrices symétriques réelles. Applications.

151 Formes réduites d'endomorphismes. Applications.

153 Résolution de problèmes modélisés par des graphes.

154 Trigonométrie.

LEÇONS D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence.

202 Séries à termes réels positifs.

203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi–convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).

204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.

205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation de fonctions.

206 Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples.

207 Parties connexes de $\mathbf{R}$ et théorème des valeurs intermédiaires. Exemples et applications.

208 Théorème du point fixe. Applications.

209 Séries de fonctions : convergence uniforme, convergence normale (les résultats relatifs aux suites de fonctions sont supposés connus). Propriétés de la somme, exemples.

210 Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.

212 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.

213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π.

214 Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. Applications.

215 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.

216 Théorème de Rolle. Applications.

217 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

218 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.

219 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.

220 Calcul de valeurs approchées d'une intégrale. Exemples d'estimation de l'erreur.

221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$.

222 Intégrale d'une fonction numérique continue sur un intervalle compact. Propriétés.

223 Intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

224 Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$.

225 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ; écriture matricielle ; exponentielle d'une matrice.

226 Équations différentielles linéaires à coefficients constants. Exemples.

227 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentielle. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Fonctions composées.

228 Fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. Inégalités des accroissements finis. Applications

229 Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli, variable aléatoire de loi binomiale.

230 Probabilité conditionnelle et indépendance. Exemples.

231 Espérance, variance, covariance ; loi faible des grands nombres.

232 Lois usuelles de variables aléatoires possédant une densité ; loi uniforme sur un intervalle borné, loi exponentielle, loi normale.

233 Approximation d'un nombre réel. Théorèmes et méthodes.

234 Équations et systèmes différentiels.

235 Exponentielles et logarithmes

236 Fonctions définies sur un intervalle, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$. Dérivabilité, théorème des accroissements finis, exemples.

237 Intégrales et primitives.

238 Le nombre π.

240 Recherche d'extremums.

241 Suites de fonctions. Divers modes de convergence. Exemples.

242 Suites de nombres réels.

243 Utilisations de la dérivée d'une fonction numérique.

EXERCICES D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

301 Exercices sur les groupes.

302 Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.

303 Exercices faisant intervenir la division euclidienne.

304 Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

305 Exercices faisant intervenir les nombres premiers.

306 Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.

307 Exercices faisant intervenir des dénombrements.

308 Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

309 Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.

311 Exercices faisant intervenir la notion de rang.

312 Exercices sur les matrices inversibles.

313 Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.

314 Exercices faisant intervenir des déterminants.

315 Exemples de recherche et d'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.

316 Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.

317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.

318 Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.

319 Exemples de méthodes et d'algorithmes de calcul en algèbre linéaire.

320 Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.

321 Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.

322 Exercices sur les formes quadratiques.

323 Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.

324 Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes ou indirectes.

325 Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.

326 Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.

327 Exercices faisant intervenir des applications affines.

328 Exemples de propriétés affines et de propriétés métriques en dimension 2.

329 Exercices sur les aires et les volumes de figures simples.

330 Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimension 2 et en dimension 3.

331 Exercices sur la cocyclicité.

332 Exercices sur les cercles.

333 Exercices de géométrie plane faisant intervenir des triangles isométriques ou semblables.

334 Exercices sur les coniques.

335 Exemples d'étude de courbes planes.

336 Exemples d'étude locale de courbes planes paramétrées.

337 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).

338 Exercices sur les propriétés métriques des courbes de l'espace.

339 Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

340 Exemples de groupes en géométrie.

341 Exercices de construction en géométrie plane.

342 Exemples de choix de repères pour la résolution d'exercices de géométrie en dimension 2 ou en dimension 3.

343 Exercices de cinématique du point.

344 Exemples d'étude de problèmes de mécanique du point.

345 Exercices sur les triangles.

EXERCICES D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

401 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.

402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.

404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.

405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.

406 Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.

407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.

409 Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.

410 Comparaison sur des exemples de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.

411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.

412 Exemples de développements en série entière. Applications.

413 Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

415 Exemples d'applications du théorème et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle.

416 Exemples d'encadrements de fonctions numériques ; utilisations.

417 Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.

418 Exemples d'utilisation de développements limités.

419 Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.

420 Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.

421 Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.

423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.

424 Exemples d'intégration sur un intervalle.

425 Exemples de calculs d'aires et de volumes.

426 Exemples de calculs d'intégrales multiples.

427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

428 Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires, linéaires ou non linéaires.

429 Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires.

430 Exemples d'équations différentielles issues des sciences expérimentales ou de l'économie.

431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.

432 Exemples d'approximations d'un nombre réel.

433 Approximations du nombre π.

434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.

435 Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.

436 Exemples de calcul de primitives.

437 Exemples de variables aléatoires et applications.

438 Exemples de problèmes de dénombrement.

439 Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.

440 Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

441 Exemples de systèmes différentiels linéaires $Y' = AY$ à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.

5.2 La première épreuve orale

Cette épreuve comprend trois parties : le plan, le développement puis les questions du jury. Chacune dure un quart d'heure. Elle est précédée d'une préparation de trois heures avec les documents autorisés. Avant de faire des commentaires spécifiques à chacune des phases de l'épreuve, commençons par des remarques d'ordre général.

Durant le temps de préparation, les candidats peuvent utiliser les livres de la bibliothèque de l'agrégation ainsi que les livres qu'ils ont apportés hormis les ouvrages interdits. Ces ouvrages interdits sont ceux qui se présentent comme des recueils de leçons types.

Il est conseillé de bien lire et comprendre le sujet. Il vaut mieux éviter de se disperser en cherchant dans un trop grand nombre d'ouvrages. Il faut bien sûr maîtriser les résultats du programme de l'agrégation correspondant au sujet traité, mais si un candidat, pour une application ou une comparaison de méthodes, évoque d'autres outils du programme, il est nécessaire qu'il les connaisse aussi. Rappelons que le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets, et qu'il est libre de choisir celui qu'il va traiter. Il est déconseillé de changer de choix en cours de préparation.

Les deux premières parties de l'interrogation : plan et exposé se déroulent sans interruption, les questions ne débutent qu'après et portent en premier lieu sur ce qui vient d'être présenté. Ce mode de fonctionnement impose au candidat de faire tenir l'intégralité de son plan et de son développement sur le tableau (recto verso). Il y a bien assez de place à condition de gérer correctement le tableau.

Le plan

En voici le principe : en quinze minutes, il s'agit de faire un exposé structuré sur le sujet choisi : définitions, énoncés clairs et précis, exemples, contre exemples, applications. . .Cela doit ressembler à un cours magistral dans lequel on ne présente toutefois aucune démonstration. Il doit être conforme au programme de l'agrégation interne.

Le candidat n'est pas obligé d'être exhaustif sur le sujet, mais il est souhaitable qu'il puisse expliquer ses choix. Le jury attend avant tout un exposé logique avec des énoncés complets et exacts, des définitions et théorèmes (qu'il ne faut pas confondre) et une présentation rendue attrayante par l'intérêt porté par le candidat au sujet, par de nombreux exemples et quelques figures. Mais il est important aussi de montrer que l'on a compris l'utilité et la portée du chapitre en donnant des applications.

Le candidat doit gérer l'espace, le tableau, et la durée de quinze minutes. Beaucoup de candidats restent dix minutes sur des généralités avant de « bâcler au sprint » les résultats importants ou les applications. Les abréviations sont tolérées, on peut s'abstenir d'écrire quelques résultats proches d'autres résultats déjà mentionnés, mais les propositions et les définitions doivent être intégralement écrites au tableau « prêtes à être apprises par des élèves ». L'énoncé oral des prérequis est possible, en modérer la longueur.

Le candidat peut consulter ses notes personnelles en cours d'exposé mais ne peut se contenter de les recopier !

Il termine son exposé en indiquant le point qu'il se propose de développer dans la deuxième partie. Il est déconseillé de montrer au jury des hésitations sur ce choix

Le développement

Le candidat a le choix de développer une démonstration, un exemple ou une application. Ce choix doit être consistant, cohérent avec le niveau de l'exposé et pouvoir être présenté en quinze minutes. Il doit porter sur une partie significative de l'exposé : un même développement, bien préparé pendant l'année, peut servir dans plusieurs leçons mais pas dans toutes.

Pendant cette phase le candidat doit mettre en valeur ses qualités pédagogiques, il doit travailler sans notes : il a compris ce qu'il expose et le rend compréhensible à son auditoire :

- il commence par expliquer les idées importantes de la démonstration avant de rentrer dans les détails techniques,

- il s'appuie le plus possible sur des figures, et pas seulement en géométrie,

- il insiste sur les points difficiles,

- il montre qu'il a bien compris le rôle de chacune des hypothèses

Nous conseillons aux candidats de préparer soigneusement cette partie.

Les questions du jury

Le candidat doit avoir conscience que par ses questions le jury ne cherche qu'à

- corriger une erreur commise, rectifier une imprécision dans le plan ou une démonstration,

- contrôler si la démonstration est comprise ou seulement récitée, par exemple en variant les hypothèses,

- vérifier que le candidat a une maîtrise suffisante des sujets abordés : par exemple un candidat qui a énoncé le théorème de Heine ne devrait pas avoir de difficulté à démontrer que la fonction *sinus* est uniformément continue sur toute la droite,

- donner au candidat l'occasion de montrer ses connaissances sur d'autres aspects du sujet ou des applications, en restant dans le cadre du programme.

On ne demande pas à un candidat qui vient de passer déjà plus de trente minutes d'épreuve devant un jury d'improviser la résolution d'un exercice.

Ainsi, le candidat ne doit pas se laisser démonter par ces questions, leur seul but est de lui permettre de se valoriser.

5.3 La seconde épreuve orale

Déroulement de l'épreuve

Cette épreuve, comme la précédente, dure 45 minutes maximum et elle est précédée de trois heures de préparation.

A son arrivée, le candidat tire au hasard une enveloppe comportant deux thèmes. Le candidat choisit un thème parmi les deux qu'il a tirés et sélectionne des exercices l'illustrant. Il dispose pour cela de trois heures pendant lesquelles il peut librement s'aider des documents de la bibliothèque de l'agrégation interne, ainsi que de tout ouvrage qu'il aura lui-même apporté, à l'exclusion des ouvrages interdits.

A l'issue de cette préparation, le candidat doit fournir un document comportant les énoncés de trois à six exercices ainsi que les motivations de son choix. Ce document est photocopié ; en se présentant devant le jury, le candidat lui remet ces photocopies et conserve l'original.

L'épreuve se déroule alors en trois temps : 1) Présentation motivée de l'ensemble des exercices sélectionnés par le candidat et illustrant le thème choisi (durée maximale de 15 minutes). 2) Résolution commentée d'un des exercices au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de 15 minutes). 3) Questions du jury (durée minimale de 15 minutes).

Voici quelques remarques inspirées au jury par le concours 2005 :

Le choix des exercices

Il est important que le candidat propose :

Des exercices entrant bien dans le thème choisi. Un hors-sujet est toujours sanctionné. À propos des thèmes dont l'intitulé est du type « Exercices faisant intervenir... », il serait bon que la majorité des exercices proposés par le candidat ne soient pas des exercices destinés uniquement à étudier directement la notion en question. Ainsi par exemple, pour le thème « Exercices faisant intervenir des polynômes », un exercice illustrant l'utilisation d'un polynôme pour calculer le déterminant d'une matrice est apprécié. Par ailleurs, la seconde épreuve orale n'est pas une épreuve d'exposé de résultats de cours, et il est souhaitable que les candidats fassent preuve de discernement en ce sens. Il ne s'agit donc pas de proposer des exercices qui consistent à démontrer des résultats de cours classiques, même si leur contenu mathématique est significatif (lemme des noyaux, théorème de Wilson, ou même la classification des groupes abéliens finis par exemple).

Des exercices de difficulté et technicité bien choisies. Même si le jury valorise évidemment un choix d'exercices difficiles, il est important de rappeler que le candidat doit être capable de résoudre tous les exercices qu'il propose. Il n'est pas rare de voir un candidat proposer plusieurs exercices difficiles et un exercice facile, choisir de résoudre l'exercice facile et s'avérer incapable de résoudre, voire de comprendre, l'un des autres exercices. Cette attitude est inévitablement sanctionnée. Rappelons aussi que la virtuosité dans les calculs techniques est certes appréciée, mais il vaut mieux éviter de présenter des exercices où la difficulté réside essentiellement dans la technicité. Un exercice dont le but est de calculer une intégrale, ou de montrer qu'une série est convergente, et dont la résolution nécessite l'établissement de plusieurs lemmes intermédiaires ou l'introduction de plusieurs fonctions auxiliaires ne valorise pas l'aptitude du candidat à se confronter véritablement aux difficultés rencontrées par des élèves, en l'absence d'indications notamment.

Des exercices offrant une application substantielle. Rappelons qu'un exercice trouvant son origine ou sa formulation dans d'autres thèmes voire d'autres sciences est toujours apprécié. Pour certains thèmes, cela devient une obligation : un bon choix d'exercices portant sur des systèmes d'équations différentielles devrait contenir des énoncés issus par exemple de la mécanique, de l'électronique ou autre.

Des exercices variés. En règle générale, les candidats doivent proposer des exercices illustrant plusieurs aspects du thème. Sans prétendre à l'exhaustivité, on appréciera notamment que le candidat choisisse des exercices illustrant plusieurs méthodes de résolution d'un même problème, ou bien des exercices de niveaux variés (plusieurs thèmes sont récurrents dans la scolarité et peuvent donc être illustrés différemment suivant le niveau auquel on se place), ou encore des exercices posant des questions différentes au sein du thème (par exemple étude de la convergence absolue, étude de la semi-convergence ou calcul explicite si le thème porte sur les intégrales impropres).

L'exposé motivé des exercices

Cette partie ne doit pas dépasser un quart d'heure. La parole est laissée au candidat qui doit argumenter son choix d'exercices. Malheureusement ce temps de l'épreuve est souvent réduit à la portion congrue. Beaucoup de candidats, en mal d'inspiration, reprennent oralement leurs énoncés, en présentent déjà des éléments de résolution ou se lancent dans de longs rappels de cours afin d'occuper tout le temps qui leur est imparti.

Rappelons encore une fois que, même s'il est possible de donner quelques énoncés de résultats de cours dans le but d'enrichir le propos pédagogique (mais l'occasion est assez rare), l'esprit de la seconde épreuve orale est différent de celui de la première.

La présentation des exercices doit être pour le candidat l'occasion de montrer qu'il connaît non seulement le sujet dont il parle, mais aussi les difficultés qui se posent lorsqu'il s'agit d'enseigner ce sujet, les applications éventuelles de certains résultats ou les comparaisons de performances de certaines méthodes.

Conscient de la difficulté de cette partie de l'épreuve, le jury ne pénalise pas beaucoup les candidats qui donnent une présentation trop rapide mais qui font preuve d'un réel effort pour respecter l'esprit de l'épreuve.

Quelques candidats invoquent le fait que leurs exercices sont destinés à un public d'étudiants post-baccalauréat, auquel ils n'ont pas vocation à être confrontés, pour justifier a posteriori le fait que certains exercices soient formulés en des termes inexploitables par des élèves ou étudiants. Il semble néanmoins raisonnable d'imaginer que la pratique pédagogique d'un enseignant est une qualité que tous les candidats doivent avoir développée et qui doit être mise en valeur, quels que soient le thème et le niveau choisis.

La résolution commentée d'un exercice

Le candidat choisit un exercice parmi ceux qu'il a proposés et le résout. Cette partie dure un quart d'heure.

Le candidat doit dominer la résolution et pouvoir s'affranchir de ses notes. Il est regrettable de constater qu'encore beaucoup de candidats, pourtant enseignants depuis plusieurs années pour la majorité, s'avèrent incapables de résoudre de façon autonome l'exercice qu'ils ont eux-mêmes choisi. Même si, exceptionnellement, le jury peut autoriser le candidat à consulter ses notes, il sanctionnera cette attitude dans son évaluation.

Dans certains exercices, le candidat peut choisir de passer rapidement sur certaines étapes de calcul afin d'arriver rapidement aux points importants de sa démonstration. Il peut ainsi, dans des situations particulièrement techniques, être autorisé à recourir à ses notes.

Le jury peut intervenir à tout moment, par exemple pour faire préciser des hypothèses ou résultats employés, ou rectifier des erreurs d'inattention qui peuvent nuire à la suite de la résolution. Dans certaines situations, l'utilisation de figures ou diagrammes explicatifs est vivement appréciée.

Les questions du jury

Cette phase éclaircit et prolonge les deux premières. Les questions peuvent ainsi porter sur certaines motivations exposées ou sur la résolution proposée. Il peut aussi être demandé au candidat de résoudre, éventuellement partiellement, un autre exercice qu'il a proposé et que le jury choisit, ou bien que le candidat n'a pas proposé. Cette phase de l'épreuve étant essentielle, le jury tient à garder suffisamment de temps pour cette phase et peut donc être amené à abréger ou interrompre l'une des deux premières étapes au bout du temps imparti. Lors de cette étape, le jury finit d'évaluer le recul pris par le candidat sur le thème choisi.

On peut noter que sur les thèmes autour de l'approximation des nombres ou même de la convergence en général, encore trop de candidats ne peuvent comparer les diverses méthodes qu'ils ont choisi de proposer, notamment en termes de vitesse de convergence ou de précision, voire s'avèrent incapables de donner un sens, même « vague », à ces notions.

On constate aussi encore des confusions entre les différents types de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.

Malgré tout, le candidat ne doit pas se laisser effrayer par les questions : tous les ans, on voit des candidats bien notés quitter la salle de leur épreuve avec l'impression d'un échec parce qu'ils n'ont pas répondu à la dernière question posée.

Conclusion

Réussir cette seconde épreuve, c'est avoir réussi la compilation parfois difficile des compétences suivantes : non seulement maîtriser un thème mathématique donné, mais aussi avoir pris suffisamment de recul sur ce thème pour être conscient des difficultés sur lesquelles son enseignement peut déboucher et des diverses mises en lumière qu'on peut lui donner. Tout effort notable d'un candidat en ce sens sera reconnu et apprécié.

Bibliothèque de l'agrégation

6 Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques Tomes 1A,1B,2,3,4,5,6,7	Ellipses
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod
ANDREWS G.	Number Theory	Dover
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG.	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie Tome I Tome II	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus tome 4	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques 1. Algèbre 2. Analyse 3. Compléments d'analyse 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Equations différentielles ordinaires	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée Tomes 1 et 2	PUF

AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques Tome 1 Tome 2	Masson
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mac Graw Hill
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	Oxford Science Publications

BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	The mathematical association of America
BONNANS **GILBERT** **LE MARECHAL** **SAGASTIZABAL**	Optimisation numérique	Springer
BOURBAKI N.	Eléments de Mathématique Topologie générale, chapitres V à IX Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII Intégration, chapitres I à IV.	Hermann
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	Hermann
BOUZITAT C. **PAGÈS G.**	En passant par hasard	Vuibert
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	Springer
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson
BRIANE M **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire 1. Espaces vectoriels , Polynômes 2. Matrices et réduction	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Anneaux-Corps vol. 1 Éléments de théorie des anneaux	PUF

CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 2,3	Masson
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	Springer-Verlag
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHRISTOL G.	Algèbre 1	Ellipses
CHRISTOL G.	Algèbre 2	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Masson
COGIS O. **ROBERT C.**	Théorie des graphes	Vuibert

COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley
COLLECTIF	Les Nombres	Vuibert
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman et Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics Volume 1 Volume 2	John Wiley
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
CROUZEIX M. **MIGNOT A.**	Analyse numérique des équations différentielles	Masson
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson
DE KONNINCK **MERCIER**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo
DEHAME F. **HÉNOCQ C.**	Algèbre, analyse, géométrie	Vuibert
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	Que-sais-je ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF

DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DIEUDONNE J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann
DIEUDONNE J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNE J.	Sur les groupes classiques	Hermann
DIEUDONNE J.	Éléments d'Analyse. 2	Gauthier-Villars
DIEUDONNE J.	Éléments d'Analyse. Fondements de l'analyse moderne	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle Première année Deuxième année	Gauthier-Villars
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	Wiley
DUBREIL P. **DUBREIL-JACOTIN M.L.**	Leçons d'Algèbre moderne	Dunod
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les mathématiques : plaisir et nécessité	Vuibert
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF

DUGAC P.	Histoire de l'analyse	Vuibert
DYM H. **ITEAN Mac H.P.**	Fouriers series and integrals	Academics Press
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFEÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	Ellipses
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes Analyse. Volume 1 Algèbre.	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse Analyse 2 : Éléments de topologie générale	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications Volume 1 Volume 2	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse. Tomes 1,2,3,4	Vuibert
FOATA D. **FUCHS A.**	Calcul des probabilités	Masson
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques oraux X-ens Algèbre 1	Cassini

FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève et le professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Anneaux	HERMANN
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices Tome 1 Tome 2	DUNOD
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse tomes 1, 2, 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY

GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation I Topologie et Analyse fonctionnelle	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales Tomes 1,2,3,4	PUF
GOURDON X.	Algèbre	Ellipses
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' : analyse	Ellipses
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration	Hermann
GREUB W.	Linear Algebra	Springer Verlag
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini
HAMMAD P. et TA-RANCO A.	Exercices de probabilités	Cujas
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas
HAMMER **HOCKS** **KULISH** **RATZ**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis Volume 1,2,3	Wiley-Interscience

HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOCHARD M. **SCIUTO G.**	Algèbre, analyse, géométrie	Vuibert
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
HUBBARD **WEST**	Équations différentielles et systèmes dynamiques	Springer
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer-Verlag
IREM des Pays de Loire	Exercices de géométrie élémentaires	
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités	Vuibert
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra Tome I Tome II	Freeman and Co
KAHANE **CARTIER** **ARNOLD et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
KNUTH D.E.	The art of computer programming Volume 1 : Fundamental algorithms Volume 2 : Seminumerical algorithms Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses

KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	Dunod
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier Analysis	Cambridge
KÖRNER T.W.	Fourier Analysis	Cambridge
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUG
LANG S.	Algèbre linéaire Tome 1 Tome 2	InterEditions
LANG S.	Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LAVILLE	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
LAX D.	Linear Algebra	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar	Cassini
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSE S. **HEMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay

LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales 1 : Topologie 3 : Intégration et sommation 4 : Analyse en dimension finie 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques Tomes 1,2,3,4	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques Tome 1 : Algèbre Tome 2 : Analyse Tome 3 : Géométrie et cinématique Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LION G.	Géométrie du plan	Vuibert
LION G.	Algèbre pour la licence	Vuibert
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre 1 : Structures fondamentales 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann

MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle Tome 1 : Exercices et corrigés Tome 2 : Exercices et corrigés Tome 3 : Exercices et corrigés Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MNEIMNE R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales : Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	Ellipses
MONIER J.M.	Algèbre et géométrie MPSI Algèbre et géométrie MP Analyse MPSI, Analyse MP	Dunod
MONIER J.M.	Cours de mathématiques Algèbre 1, Algèbre 2 Analyse 2, Analyse 4	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique Tome 1 Tome 2	Vuibert
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction . Ecole Polytechnique	Ellipses

MAC LANE S. **BIRKHOFF G. Algèbre**	1 : Structures fondamentales 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1	CASSINI
OUVRARD J.Y.	Probabilités 2	CASSINI
PAPINI O.	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis Volume I Volume II	SPRINGER-VERLAG

QUEFFELEC H. **ZUILY Cl.**	Eléments d'analyse pour l'agrégation	Masson
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	Internatinal Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales 1- Algèbre 2- Algèbre et applications à la géométrie 3- Topologie et éléments d'analyse 4- Séries et équations différentielles 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions Algèbre - Analyse 1,2	Masson
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	Hermann
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	Gauthier-Villars
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	Springer
ROBERT C.	Comptes et décomptes de la statistique	Vuibert
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP Sciences
ROMBALDI J.E.	Interpolation et approximation	Vuibert
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	Cassini
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	Masson
RUDIN W.	Functional analysis	Mac Graw-Hill

RUDIN W.	Real and complex analysis	MAC GRAW-HILL
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	MASSON
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT	Analyse 1	ELLIPSES
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	SPRINGER
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel Algorithmes fondamentaux	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire	VUIBERT
SCHWARTZ L.	Analyse I Topologie générale et analyse fonctionnelle II Calcul différentiel et équations différentielles	HERMANN
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
SEDGEWICK R.	Algorithms	ADDISON WESLEY
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	Analyse 3	ELLIPSES
SERVIEN Cl.	Analyse 4	ELLIPSES

SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Géométrie	Masson
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TENENBAUM G.	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques	Vuibert
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique I Théorie des fonctions II Equations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson
VEIGNEAU S.	Approche impérative et fonctionnelle de l'algorithmique	Springer

WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles	HERMANN
WARUSFEL A.	Cours de mathématiques spéciales.	DUNOD
WARUSFEL A.	Cours de mathématiques supérieures.	DUNOD
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL A. ATTALI et coll	Analyse	VUIBERT
WARUSFEL A. ATTALI et coll	Arithmétique	VUIBERT
WARUSFEL A. ATTALI et coll	Géométrie	VUIBERT
WARUSFEL A. ATTALI et coll	Probabilités	VUIBERT
WHITTAKER E.T. WATSON G.N.	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YOUNG D.M. GREGORY R.T.	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI

7 Ouvrages non autorisés à l'oral lors de la session 2005

AGRÉGATION INTERNE ET CAERPA DE MATHÉMATIQUES

OUVRAGES NON AUTORISÉS POUR L'ORAL

N'est autorisé aucun ouvrage se présentant comme un recueil de « leçons modèles », notamment :

AVEZ A. Analyse pour l'agrégation [Masson]

AVEZ A. La leçon d'analyse à l'Oral de l'agrégation [Masson]

AVEZ A. La leçon de géométrie à l'Oral de l'agrégation [Masson]

CHAMBERT-LOIR A. Exercices de mathématiques pour l'agrégation,
tome I, 1^{re} édition [Masson]

CORTIER J.P. Exercices corrigés d'algèbre et géométrie [CRDP de Champagne Ardenne]

DUMAS Laurent Modélisation à l'oral de l'agrégation. Calcul Scientifique [Ellipses]

GUENARD F. Vademecum de l'oral d'analyse, agrégation de mathématiques [Eska]

MADERE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'algèbre [Ellipses]

MADERE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'analyse [Ellipses]

MADERE K. Développement pour leçon d'analyse, agrégation de mathématiques [Ellipses]

MADERE K. Développement pour leçon d'algèbre, agrégation de mathématiques [Ellipses]

MEUNIER P. Exercices pour l'agrégation interne de mathématiques [PUF]

MEUNIER P. Préparation à l'agrégation interne, IREM de Montpellier [PUF]

TOULOUSE P.S. Thèmes de probabilités et statistiques, agrégation de mathématiques [Dunod]