Ministère de l'éducation nationale, de
l'enseignement supérieur et de la recherche

Direction des personnels enseignants

Rapport de l'agrégation interne et CAERPA de mathématiques année 2004

Ce rapport, rédigé par des membres du jury, est publié sous la responsabilité du président du jury

Table des matières

Composition du jury

1 Composition du jury

Président			
VAN DER OORD	Eric	IGEN	
Vice-présidents			
CAMUS	Jacques	Professeur des Universités	RENNES
GRAMAIN	André	Professeur des Universités	TOURS
MARCHAL	Jeannette	IGEN	
ROSSO	Marc	Professeur des Universités	PARIS VII
SKANDALIS	Georges	Professeur des universités	Université Denis Diderot (Paris VII) PARIS
Secrétaire général			
CHEVALLIER	Jean Marie	Maître de Conférences	ORLEANS
ADAD	René	Professeur agrégé	Lycée Militaire AIX EN PROVENCE
ALDON	Gilles	Professeur agrégé	Lycée Jacques Brel VENISSIEUX
ALESSANDRI	Michel	Professeur de chaire supérieure	MONTPELLIER
AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	VERSAILLES
BATUT	Christian	Maître de Conférences	BORDEAUX
BENNEQUIN	Daniel	Professeur des universités	Université Denis Diderot (Paris VII) PARIS
BLONDEL	Corinne	Chargée de recherches	CNRS
CHMURA	Rémi	Professeur agrégé	Lycée Roosevelt REIMS
COULET	Cyrille	Professeur de chaire supérieure	lycée P.DE GIRARD AVIGNON
COURBON	Denise	IA-IPR	LYON
D'ALMEIDA	Jean	Professeur des universités	LILLE
DEGUEN	Eliane	IA-IPR	RENNES
DICHI	Henri	Maître de Conférences	CLERMONT-FERRAND
DUCOURTIOUX	Jean Louis	Maître de Conférences	CLERMONT FERRAND
ELKIK-LATOUR	Renée	Professeur des universités	ORSAY
FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences	REIMS
FONTAINE	Philippe	Professeur de chaire supérieure	Lycée Guez de Balzac ANGOULEME
FONTANEZ	Françoise	Professeur de chaire supérieure	Lycée Buffon Paris
GALL	Philippe	Professeur de chaire supérieure	Lycée Champollion GRENOBLE
GENAUX	Patrick	Professeur de chaire supérieure	Lycée Kléber STRASBOURG
GUELFI	Pascal	Professeur de chaire supérieure	CLERMONT-FERRAND
HIJAZI	Oussama	Professeur des universités	NANCY
LAZAR	Boris	IA-IPR	RENNES
LE GOFF	Claire	Professeur agrégé	Université de Paris VI PARIS
LEFEVRE	Pascal	Maître de Conférences	Université d'Artois
LEPEZ	Catherine	Professeur Chaire supérieure	Lycée Faidherbe LILLE
LINO	Danièle	Professeur chaire supérieure	Lycée Roosevelt REIMS

LODAY-RICHAUD	Michèle	Professeur des universités	ANGERS
LODS	Véronique	Professeur agrégé	Lycée Camille Guérin POITIERS
LOSEKOOT	Anne	Professeur chaire supérieure	Lycée Bellevue TOULOUSE
MALLORDY	Jean François	Professeur agrégé	Lycée Blaise Pascal CLERMONT-FERRAND
MBEKHTA	Mostafa	Professeur des universités	LILLE
MOSSE	Brigitte	Maître de conférences	MARSEILLE
MURAT	Christiane	Professeur chaire supérieure	Lycée Condorcet PARIS
RITTAUD	Benoît	Maître de Conférences	PARIS XIII
ROSER	Erick	IA-IPR	POITIERS
ROUSSET-BERT	Suzette	IA-IPR	STRASBOURG
ROUX	Daniel	Maître de Conférences	CLERMONT-FERRAND
SCHILTZ	Dominique	Professeur de chaire supérieure	Lycée Faidherbe LILLE
SESTER	Olivier	Maître de Conférences	Marne-la-Vallée
SKANDALIS	Angélique	Professeur de chaire supérieure	Lycée Janson de Sailly PARIS
SORBE	Xavier	IA-IPR	BORDEAUX
SUFFRIN	Frédéric	Professeur agrégé	Lycée Kléber STRASBOURG
THEBAULT	Roland	Professeur de chaire supérieure	Lycée Chateaubriand RENNES
VENTURA	Joseph	Professeur de chaire supérieure	Lycée Dumont d'Urville TOULON
VIAL	Jean-Pierre	Professeur de chaire supérieure	Lycée Buffon PARIS

Statistiques

2 Statistiques

AGRÉGATION INTERNE ET CAERPA DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2004

RÉSULTATS STATISTIQUES

Les épreuves écrites ont eu lieu les 4 et 5 février 2004, la liste d'admissibilité a été signée le 29 mars 2004 :

Agrégation interne : 287 admissibles ; CAERPA : 21 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 10 avril au 19 avril 2004 au lycée Fénelon à Paris. La liste d'admission a été signée le 20 avril 2004 :

Agrégation interne : 130 admis ; CAERPA : 9 admis.

Remarques : Comme on peut le constater sur les tableaux d'évolution des deux concours donnés ci-après, le nombre des candidats présents aux deux épreuves écrites est relativement stable par rapport à l'an passé. Le nombre de postes est stable aux deux concours. Les résultats du CAERPA connaissent un certain fléchissement.

Le calendrier prévu pour la session 2005 est le suivant :

Écrit : février 2005.

Oral : non encore fixé.

Nombre de places offertes au concours en 2005 :

Agrégation interne : non encore fixé

CAERPA : non encore fixé.

Évolution des concours

AGRÉGATION INTERNE

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989	120	2951	1706	232	120+52*
1990	225	2386	1326	444	225+85*
1991	352	2575	1299	510	352+43*
1992	331	2538	1195	508	331+34*
1993	334	2446	1184	478	334+13*
1994	330	2520	1244	475	330+12*
1995	330	2211	1212	446	330
1996	246	2249	1150	441	246
1997	200	2113	1084	436	200
1998	200	2083	1071	432	200
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130

*liste supplémentaire

CAERPA

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989					
1990					
1991	13				10
1992	20	269	102	22	14
1993	40	302	128	42	25
1994	36	331	156	57	36
1995	31	340	155	53	31
1996	39	375	176	64	39
1997	32	379	181	58	32
1998	28	372	169	61	28
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9

2.1 Statistiques de l'agrégation interne 2004

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	1813	1382	287	130
Femmes	620	474	80	41
Français et U.E.	1813	1382	287	130
Union Européenne	0	0	0	0
Étrangers hors UE	0	0	0	0
Moins de 50 ans	1647	1265	274	122
Moins de 45 ans	1459	1128	254	113
Moins de 40 ans	1263	981	241	106
Moins de 35 ans	948	755	206	88
Moins de 30 ans	264	216	82	43

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	8	5	3	12	11	9	13	11	9
épreuve 2 (sur 20)	9	6	4	13	11	9	14	12	10
Total écrit (sur 200)	82	59	38	121	105	95	136	114	103

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	1	1	1	1	1	1
19	0	0	0	2	2	2	2	2	1
18	0	0	0	3	3	3	5	5	4
17	2	2	2	7	7	5	10	10	9
16	4	4	4	17	17	14	18	18	17
15	9	9	9	27	27	21	32	32	28
14	25	25	24	39	39	29	44	44	36
13	46	46	41	69	69	47	74	74	55
12	73	73	58	108	106	64	121	119	78
11	115	115	78	160	147	79	176	160	96
10	174	174	105	200	182	95	259	208	109
9	265	265	126	299	230	109	359	252	124
8	375	287	130	404	253	120	474	269	126
7	514	287	130	553	279	130	622	280	130
6	686	287	130	710	287	130	766	284	130
5	845	287	130	881	287	130	927	287	130
4	1018	287	130	994	287	130	1073	287	130
3	1142	287	130	1147	287	130	1191	287	130
2	1254	287	130	1286	287	130	1318	287	130
1	1345	287	130	1386	287	130	1383	287	130
0	1382	287	130	1422	287	130	1403	287	130

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	12	9	6	14	12	10
épreuve 2 (sur 20)	12	9	7	14	11	9
Total général (sur 400)	226	201	182	254	229	214

le total général est ramené sur 20

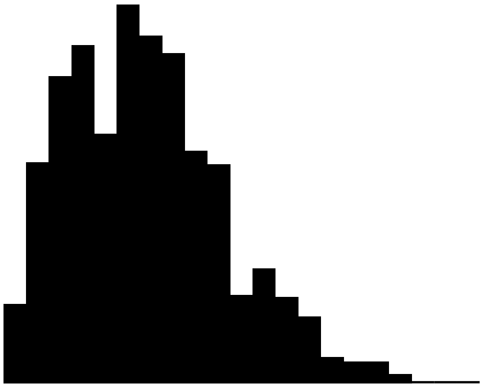
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	2	2	1	1
18	0	0	4	4	3	3
17	0	0	10	10	7	7
16	3	3	16	16	18	18
15	4	4	24	23	24	24
14	10	10	42	40	37	36
13	22	22	66	62	52	47
12	52	52	93	79	75	62
11	87	87	113	92	97	77
10	146	130	137	103	126	96
9	213	130	158	109	156	107
8	255	130	189	120	199	123
7	278	130	208	124	231	127
6	280	130	236	125	255	129
5	280	130	276	130	275	130
4	280	130	280	130	278	130
3	280	130	280	130	278	130
2	280	130	280	130	280	130
1	280	130	281	130	280	130
0	280	130	281	130	280	130

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	84	64	10	2
BESANCON	29	19	8	2
BORDEAUX	88	58	8	5
CAEN	41	34	5	2
CLERMONTFERRAND	38	33	10	5
DIJON	50	39	8	3
GRENOBLE	78	65	14	8
LILLE	135	104	20	8
LYON	70	57	15	5
MONTPELLIER	74	56	8	4
NANCY METZ	67	57	17	7
POITIERS	30	22	5	5
RENNES	47	37	9	5
STRASBOURG	46	38	8	2
TOULOUSE	65	43	10	6
NANTES	50	35	4	2
ORLEANS TOURS	64	43	6	3
REIMS	44	33	2	0
AMIENS	59	47	16	4
ROUEN	80	65	11	6
LIMOGES	17	11	0	0
NICE	61	46	12	6
CORSE	9	4	1	0
REUNION	73	55	13	5
MARTINIQUE	28	15	2	1
GUADELOUPE	26	20	4	0
GUYANNE	10	10	1	0
PARIS/CRET/VERS	350	272	60	34

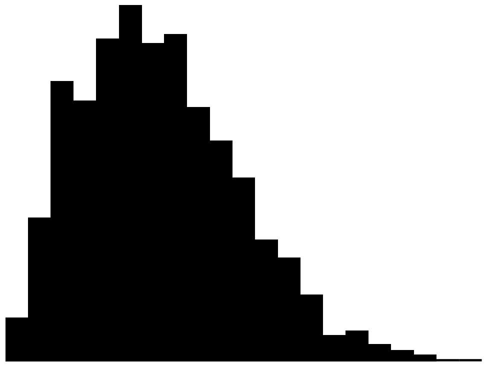
Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	24	13	1	0
ENSEIGNANT SUP	7	5	1	1
ENS.FPE.TIT	48	30	7	4
AG FPE	16	13	4	2
CERTIFIE	1621	1255	270	122
PLP	97	66	4	1

catégories				
	I	P	a	A
ENS.TIT.MEN	1743	1335	275	124
AG.FONC.PUB.ETA	68	47	12	6

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	1813	1382	287	130



Écrit 1



Écrit 2

Oral 1

Oral 2

2.2 Statistiques du CAERPA 2004

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites

Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés

Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	311	241	21	9
Femmes	138	113	6	3
Moins de 50 ans	279	217	21	9
Moins de 45 ans	226	180	16	6
Moins de 40 ans	187	152	14	4
Moins de 35 ans	128	104	11	3
Moins de 30 ans	40	37	4	2

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	6	3	2	12	10	9	16	12	10
épreuve 2 (sur 20)	6	4	2	11	9	8	14	11	9
Total écrit (sur 200)	58	39	25	114	98	92	118	114	101

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	1	1	1	0	0	0
17	0	0	0	1	1	1	0	0	0
16	1	1	1	2	2	2	0	0	0
15	1	1	1	2	2	2	1	1	1
14	1	1	1	3	3	3	2	2	2
13	1	1	1	3	3	3	2	2	2
12	1	1	1	6	6	4	5	4	2
11	5	5	4	9	9	5	9	7	4
10	9	9	6	14	12	6	14	9	5
9	18	18	9	24	18	8	21	13	6
8	27	21	9	31	21	9	36	17	7
7	43	21	9	41	21	9	59	21	9
6	58	21	9	64	21	9	80	21	9
5	86	21	9	99	21	9	119	21	9
4	119	21	9	119	21	9	147	21	9
3	157	21	9	158	21	9	175	21	9
2	200	21	9	203	21	9	213	21	9
1	224	21	9	231	21	9	239	21	9
0	241	21	9	250	21	9	244	21	9

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	11	8	5	16	11	10
épreuve 2 (sur 20)	12	9	6	16	12	11
Total général (sur 400)	212	192	159	232	224	209

le total général est ramené sur 20

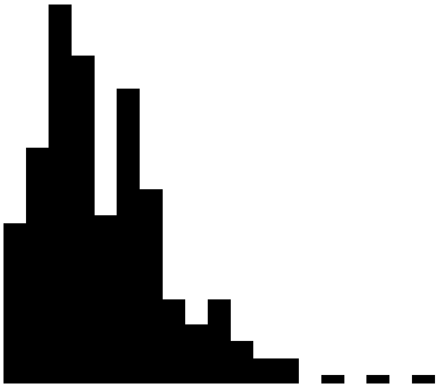
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
17	0	0	1	1	0	0
16	0	0	2	2	2	2
15	0	0	2	2	2	2
14	1	1	2	2	3	3
13	1	1	3	2	4	3
12	1	1	3	2	6	5
11	4	4	6	5	7	6
10	9	9	8	7	8	6
9	11	9	9	8	10	8
8	14	9	10	8	11	8
7	19	9	12	8	13	8
6	21	9	14	9	15	8
5	21	9	21	9	20	9
4	21	9	21	9	21	9
3	21	9	21	9	21	9
2	21	9	21	9	21	9
1	21	9	21	9	21	9
0	21	9	21	9	21	9

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	12	5	1	1
BESANCON	4	3	0	0
BORDEAUX	12	10	1	1
CAEN	7	4	0	0
CLERMONTFERRAND	2	2	0	0
DIJON	9	5	2	1
GRENOBLE	16	12	1	0
LILLE	46	42	5	1
LYON	17	13	0	0
MONTPELLIER	7	4	1	1
NANCY METZ	8	7	0	0
POITIERS	1	0	0	0
RENNES	26	23	0	0
STRASBOURG	9	8	1	0
TOULOUSE	6	5	0	0
NANTES	30	21	2	1
ORLEANS TOURS	5	4	1	0
REIMS	12	11	0	0
AMIENS	11	8	0	0
ROUEN	5	3	0	0
LIMOGES	1	1	0	0
NICE	1	1	0	0
REUNION	2	2	0	0
MARTINIQUE	1	1	0	0
GUADELOUPE	2	1	0	0
GUYANNE	2	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	57	44	6	3

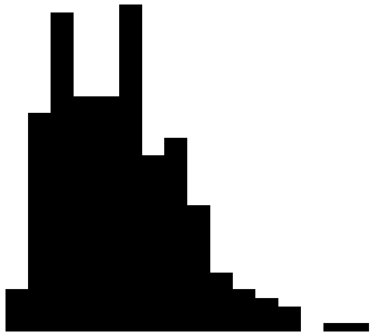
Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	11	6	0	0
MAIT-DOC REM TI	275	216	17	8
MAITRE ECH INST	25	19	4	1

catégories				
	I	P	a	A
ENSEIGN PRIVE	311	241	21	9

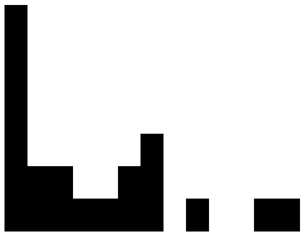
Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	311	241	21	9



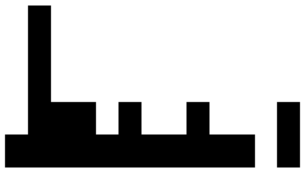
Écrit 1



Écrit 2



Oral 1



Oral 2

Programme

3 Programme du concours

3.1 Généralités

Avertissement : Le programme du concours est inchangé pour 2005, se reporter au BO n ° 3 du 29 avril 1999.

L'attention des candidats doit cependant être attirée sur l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire, notamment en ce qui concerne des éléments de statistique inférentielle et de théorie des graphes.

Il est vraisemblable que le programme du concours sera modifié l'an prochain, pour préciser les contenus associés à cette évolution, ainsi qu'à l'évolution des programmes de BTS.

3.2 Programme

Programme de l'Agrégation Interne et CAERPA de Mathématiques

Un professeur de Mathématiques devrait avoir élaboré et intériorisé une vue globale, personnelle et cohérente de ses connaissances dans sa discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres disciplines. La préparation à l'Agrégation Interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'Enseignement Secondaire étant d'autre-part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances.
S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi qu'il est proposé certains rapprochements qui peuvent être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut être d'abord approchée dans un cadre particulier, puis sous un aspect plus général.

A. PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ce programme comporte tous les programmes des classes de la seconde à la terminale incluses, dans toutes les sections.

B. PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

1. Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Application. Relation d'ordre.

Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Ensemble dénombrable. Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

Relation d'équivalence et ensemble quotient.

2. Algorithmique et informatique

Exemples d'algorithmes liés au programme.

Notion de variable, d'adresse. Instruction d'affectation, instructions conditionnelles, programmation itérative et récursive.

Fonctions et sous-programmes ; passage de paramètre. Rédaction en français ou en Pascal de programmes ne comportant qu'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes.

Aucun développement théorique n'est au programme.

3. Algèbre générale

a) Extensions successives de la notion de nombre

Anneau Z des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs de Z. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Congruences. Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathsf{Z}/n\mathsf{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathsf{Z}/n\mathsf{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax + by = c$.

Corps Q des nombres rationnels, R des nombres réels, C des nombres complexes. Théorèmes de d'Alembert-Gauss. Non dénombrabilité de R et C.

Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines n-ièmes de l'unité. Relations d'inclusion entre ces groupes. Polygones réguliers.

b) Anneaux et corps (Écrit seulement)

Définition (les anneaux sont unitaires par définition). Formule du binôme. Idéaux d'un anneau commutatif. Morphismes d'anneaux. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intègres. Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications (équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans Z).

Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur Q. Nombres transcendants.

c) Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K

Algèbre $\mathsf{K}[X]$. Division euclidienne. Idéaux de $\mathsf{K}[X]$. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun mutiple (PPCM). Théorèmes de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en facteurs irréductibles.
Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où $\mathsf{K} = \mathsf{Z}/p\mathsf{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur R et C.

Dérivation des polynômes. Identité de Taylor.

d) Fractions rationnelles sur un corps commutatif K

Corps $\mathsf{K}(X)$ des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité.

Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est R ou C.

Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

4. Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes devront être illustrées dans des situations géométriques (par exemple isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube).
Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément. Théorème de Lagrange. Image et noyau.

Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, classes de sous-groupes conjugués. Signification géométrique des notions de conjugaison. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

Polygones réguliers et groupes diédraux.

Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Groupes $O(E)$ et $SO(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes $U(E)$ et $SU(E)$ où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Formes réduites des isométries affines en dimension 2 et 3. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

5. Algèbre linéaire sur un sous-corps de C

a) Espaces vectoriels

Définition. Applications linéaires. Espace vectoriel $L(E, F)$. Algèbre $L(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$. Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.

Familles libres, génératrices, bases.
Étant donné u de $L(E, F)$, isomorphisme entre $\mathrm{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\ker(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

b) Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.
Formule liant dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Formule du rang. Caractérisation des automorphismes.

c) Matrices

Espaces $M_{p,q}(\mathsf{K})$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K. Isomorphisme canonique avec $L(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Utilisation de sous-matrices carrées pour la détermination du rang. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Matrice d'un endomorphisme d'un espace rapporté à une base. Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

Systèmes d'équations linéaires. Rang. Conditions de compatibilité. Systèmes de Cramer. Résolution par opérations élémentaires (pivot de Gauss). Applications à des problèmes de géométrie.

d) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Application à la résolution de systèmes linéaires, aux calculs de déterminants, à l'inversion de matrices carrées et au calcul du rang.

Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n, \mathsf{K})$ et $SL(n, \mathsf{K})$.

e) Déterminants

Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée. Expression développée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.

Application à l'inversion d'une matrice carrée. Formules de Cramer. Orientation d'un R-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calculs de volumes simples.

Groupes $SL(E)$ et $SL(n, \mathsf{K})$.

f) Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application à la formule d'interpolation de Lagrange. Bijection entre les ensembles des sous-espaces de E et E^* par l'orthogonalité. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.

Transposée d'une application linéaire. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

g) Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Algèbre $\mathsf{K}[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, si le polynôme caractéristique est scindé.
Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème de décomposition des noyaux. Polynôme minimal. Sous-espaces caractéristiques.

Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme scindé annulateur à racines simples.

Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

Diagonalisation par blocs. Sous-espaces caractéristiques. Décomposition de Dunford : existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$ si le polynôme caractéristique est scindé.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes, systèmes différentiels, etc.).

h) Cas où le corps K est R ou C

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $L(E)$. Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels.

Exemples de parties denses de $L(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$; si $\mathsf{K} = \mathsf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $L(E)$.

i) Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.

Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

6. Géométrie affine en dimension finie

Le corps de base est R.

Définition d'un espace affine. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.

Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.

Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme du stabilisateur d'un point et du groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.

Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.

Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

7. Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

Les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.

a) Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs et symétries. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$.

Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormée. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux axes de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.

Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.
Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

b) Angles

Matrice d'une rotation. Le groupe $SO(E)$ est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de R vers $SO(2)$. Mesure des angles.

Angles orientés de droites en dimension 2.

Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours.

Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

c) Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

d) Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.

e) Espaces hermitiens

Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$.

Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

8. Géométrie affine euclidienne orientée

a) Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.

Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.

Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.

Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.

Groupe des similitudes.

b) Géométrie plane

Propriété angulaire du cercle et applications.
Faisceau harmonique de deux droites et de leurs bissectrices.

Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Orthogonalité entre cercles.

c) Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification en les trois genres affines : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.

Section plane d'un cône de révolution.

Trajectoire parabolique d'un objet pesant. Mouvement à accélération centrale. Mouvement des planètes.

9. Propriétés affines et métriques

Pour toutes les situations géométriques, on réfléchira aux propriétés de caractère affine et à celles de nature métrique (ou euclidienne).

Groupes affines et groupes euclidiens.
Propriétés affines et euclidiennes des coniques.
Notions différentielles de caractère affine et métrique.
Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

10. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels ou complexes

Corps R et C des réels et complexes. La construction de R étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de R possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.

Complétude de R : toute suite de Cauchy de R ou C converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de R ou C on peut extraire une sous-suite convergente.

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

b) Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Étude de la convergence par les relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.

Critères de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemple d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

c) Continuité

Fonctions définies sur une partie de R. Limite, continuité à droite et à gauche, continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrema. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction monotone f sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

d) Dérivabilité

Dérivée à droite et à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.

Dérivées successives. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit.

Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Étude locale des fonctions. Conditions nécessaires d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.

Série de Taylor.

e) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions. Fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Fonctions circulaires directes et réciproques.

f) Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

g) Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Formule de Fubini si le paramètre décrit un segment. Lien avec les intégrales doubles.

h) Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I de définition.

Intégrale d'une fonction positive. Emploi des relations de comparaison.

Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des intégrales des f_n est majorée, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des $f_{n.}$

i) Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Intégration par parties.

Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.

j) Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes suivants sont admis :

Théorème de continuité : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X. Si le module de $f(x, t)$ est majoré par $g(t)$, où g est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est continue sur X.

Théorème de dérivation : Soit f une fonction continue de deux variables (x, t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X et admettant une dérivée partielle f'_x par rapport à x. Si le module de f'_x(x,t) est majoré par $h(t)$, où h est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est dérivable sur X et sa dérivée est l'intégrale de f'_x par rapport à t.

Exemples de fonctions définies par une intégrale (fonction Gamma d'Euler, transformée de Fourier).

k) Analyse numérique

Approximations d'un nombre par des suites : rapidité de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.
Approximation d'une solution d'équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.
Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur.
Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente ; recherche d'une valeur approchée de la somme d'une telle série.

Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ par la méthode d'Euler.

11. Analyse à une variable complexe

a) Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul du rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.

Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Dérivation par rapport à la variable complexe sur ce disque ouvert.

b) Extension à C des fonctions usuelles

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π, fonctions sinus et cosinus. Application à la mesure des angles.

12. Analyse fonctionnelle et vocabulaire de la topologie

a) Topologie et espaces métriques

Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques.

Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace entier, caractérisation par les images réciproques des ouverts et fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

b) Espaces vectoriels normés sur R ou C

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. Applications linéaires continues, normes de ces applications.

c) Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de R et C. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de R^n et C^n.

Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.

d) Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de R. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

e) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

Exponentielle d'un endomorphisme.

f) Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de R et C. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui même. Application aux approximations successives.

Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

g) Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach.

Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.

Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.

Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

h) Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

i) Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthogonalité des fonctions e^{inx}. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π-périodique f continue par morceaux. Sommes partielles $S_n(f,x) = \sum\limits_{-n\leqslant k\leqslant n} c_k(f)e^{ikx}$. Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.

Théorèmes de convergence de Dirichlet et F é jer. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

13. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de R^n à valeurs dans R^p.

a) Topologie de $\mathbf{R^n}$.

Normes usuelles sur R^n ; elles sont équivalentes. Complétion. Parties compactes. Limites et applications continues.

b) Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrices jacobiennes, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω : l'application associant à un point de Ω sa différentielle est continue.
Théorème admis : pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que les dérivées partielles soient continues sur Ω.

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Difféomorphismes. Caractérisation des difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^1$. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert connexe.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Gradient d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de deux variables en un point où $rt - s^2 \neq 0$. Exemples de problèmes d'extrema issus de la géométrie.

Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe $\mathcal{C}^k$.

c) Équations différentielles

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathsf{C})$ (resp. $\mathcal{C}^n$).

Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.
Dimension de l'espace vectopriel des solutions. Méthode de la variation des constantes.

Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A ou emploi du théorème de Cayley-Hamilton. Équations linéaires scalaires à coeffients constants. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.

Équations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solution de l'équation sans deuxième membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.

Notions sur les équations scalaires non linéaires (écrit seulement).

Solutions d'une équation $x' = f(t, x)$, ou $x'' = f(t, x, x')$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de R^2 ou R^3 ; existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathcal{C}^1$.

Exemples d'études qualitatives.

Résolution d'équations à variables séparables et homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.

Applications en physique et en géométrie différentielle.

14. Calcul intégral et probabilités

a) Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force. Intégrales doubles et triples. Linéarité et additivité relativement aux ensembles.

Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.
Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue positive et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Théorème de Fubini : Si f est une fonction de deux variables continue de module intégrable, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.

Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.

Extension des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini au cas de fonctions de n variables.

Applications à des calculs d'intégrales.

Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.

Exemples de calculs d'aires et de volumes.

b) Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des évènements élémentaires) ; tribu (ou ß-algèbre) des évènements ; mesure de probabilité sur cette tribu. Etude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

c) Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $P_B[A]$ de A sachant B si $P[B]$ est positif. Formule des probabilités composées et formule de Bayes. Indépendance d'un nombre fini d'évènements.

d) Variables aléatoires réelles

Etant donné un espace probabilisé (Ω,f,P), on appelle *variable aléatoire réelle* (v.a.r. en abrégé), toute application X de Ω dans R telle que l'image réciproque $\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{I})$ de tout intervalle I de R appartienne à la tribu f. On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..

On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :

Variables aléatoires réelles discrètes. Une v.a.r. est dite *discrète* si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans N. Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli ; loi binomiale ; loi géométrique et loi de Poisson.

Variables aléatoires réelles possèdant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité* sur R, toute fonction de R dans R_+ intégrable sur R et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit f une densité de probabilité sur R. On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f, si pour tout intervalle I de R, $P[\{X \in I\}] = \int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Fonction de répartition et moments (espérance, variance et écart type) d'une v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis). Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné ; loi exponentielle ; loi normale.

Si X est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de R dans R continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur R, alors on admettra que $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $\mathrm{E}[\Phi(X)] = \int_{\mathsf{R}} \Phi(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

e) Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans R^p est un *vecteur aléatoire* si chacune de ses composantes est une v.a.r.. On se limitera aux deux cas suivants :
Vecteurs aléatoires discrets. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ de Ω dans R^p est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.

Loi d'un vecteur aléatoire X. Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.

Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité. On appelle *densité de probabilité sur* R^p toute fonction f de R^p dans R_+, intégrable sur R^p et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe « Intégrales multiples »). Soit f une densité de probabilité sur R^p. On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ possède la loi de densité f, si pour tous intervalles $I_1, ..., I_p$ de R,

$$P[\{X_1 \in I_1\} \cap ... \cap \{X_p \in I_p\}] = \int_{I_1} \ldots \int_{I_p} f(x_1, ..., x_p)\,\mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_p.$$

Soit $X = (X_1, \ldots,\ X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit ψ un produit d'une fonction continue de R^p dans R par une fonction indicatrice d'un domaine « géométriquement simple » de R^p et telle que la fonction $|\psi|f$ soit intégrable sur R^p. On admettra que $\psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :

$$\mathrm{E}[\psi(X)] = \int_{\mathsf{R}} \ldots \int_{\mathsf{R}} \psi(x_1, x_2, \ldots, x_p) f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,\mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_p.$$

Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possèdant une loi avec densité. Loi normale.

f) Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.

Les résultats suivants sont admis : Loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possèdant une espérance. Théorème central limite pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.

Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi normale (loi de Gauss).

15. Géométrie différentielle

Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

a) Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.

Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace. plan osculateur.

b) Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Abscisse curviligne.

En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure.
En dimension 3, repère de Frenet, courbure, torsion.

c) Cinématique

Vitesse, accélération. Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, circulaires, à accélération centrale. Oscillateurs harmoniques. Exemples de problèmes de mécanique (pendule, chute des corps, mouvements des planètes).

Épreuves écrites

4 Rapport sur les épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

4.1.1 Énoncé de la première épreuve écrite

Définitions et notations

Dans ce texte, C est identifié à R^2. Pour x dans C on note $\operatorname{Im} x$ sa partie imaginaire.

Pour tout x dans C et tout réel positif r on note $\overline{D}(x,r) = \{y \in \mathsf{C}, |x-y| \leqslant r\}$ le disque fermé de C, de centre x et de rayon r.

Si M est une matrice carrée, $\operatorname{tr}(M)$ désigne sa trace.

Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E, on convient d'écrire $C = A \amalg B$ lorsque $C = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Pour n=1 ou 2, on note $\mathfrak{I}_n$ le groupe des isométries *affines* euclidiennes de R^n. On note $\mathfrak{I}_n^+$ le sous-groupe des isométries affines euclidiennes directes.

Lorsque E est un ensemble, on note $(\mathfrak{S}_E, \circ)$ le groupe des bijections de E sur lui-même. $\mathfrak{I}_n$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_{\mathsf{R}^n}, \circ)$.

Soit E un ensemble non vide et G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_E$; on convient de dire qu'une partie *non vide* $\mathcal{D}$ de E est *G-dédoublable* s'il existe des parties $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{D}$ telles que
(*i*) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \amalg \mathcal{D}_2$;
(*ii*) il existe g_1 et g_2 dans G tels que $g_1(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_1$ et $g_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_2$.
Autrement dit, et de façon imagée, $\mathcal{D}$ est G-dédoublable lorsque l'on peut la découper en deux parties, chacune étant superposable à $\mathcal{D}$ sous l'action de G.

Objectifs du problème

Les trois premières parties étudient l'existence éventuelle d'une partie de C (resp. de R) $\mathfrak{I}_2$-dédoublable (resp. $\mathfrak{I}_1$-dédoublable). Ces trois parties sont indépendantes.

La partie **IV** propose l'étude algébrique d'un sous-groupe de $SL_2(\mathsf{Z})$ engendré par deux matrices. Elle prépare aussi la partie **V** où l'on généralise le concept d'ensemble dédoublable en celui d'ensemble paradoxal sous l'action d'un groupe.

La partie **V** est dévolue à l'étude de deux ensembles qui se révèlent paradoxaux sous l'action du groupe étudié dans la partie **IV**.

Partie I : Parties dédoublables de C=R^2

A. Étude d'un premier exemple

On considère le disque fermé $\overline{D} = \{x \in \mathsf{C}, |x| \leqslant 1\}$.

1. On suppose l'existence de parties A et B de $\overline{D}$ telles que

$$\overline{D} = A \amalg B \ ; \quad 0 \in A \ ; \quad \exists \tau \in \mathfrak{I}_2,\ \tau(A) = B.$$

   (a) Montrer que si deux points x et y de $\overline{D}$ vérifient $|x-y| = 2$ alors leur milieu est 0.
   (b) Montrer que pour w dans $\overline{D}$, la condition $|w - \tau(0)| > 1$ entraîne $w \in A$ (on pourra raisonner par contraposition).
   (c) En déduire l'existence d'un diamètre $[u, v]$ de $\overline{D}$ à extrémités u, v dans A.
   (d) Relever une contradiction.

2. En déduire que le disque fermé $\overline{D}$ de C n'est pas $\mathfrak{I}_2$-dédoublable.

B. Cas des parties bornées

Plus généralement on se propose de montrer que

$$\boxed{\text{Aucune partie } \textit{bornée} \text{ de } \mathsf{C} \text{ n'est } \mathfrak{I}_2\text{-dédoublable.}}$$

La preuve qui suit est due à H. HADWIGER et H. DEBRUNNER [1964].

B 1. Disque enveloppant minimal

Soit $\mathcal{B}$ une partie non vide et *bornée* de C. Pour r dans R_+ on pose $\mathcal{C}_r = \{x \in \mathsf{C}, \mathcal{B} \subset \overline{D}(x,r)\}$ et $R = \{r \in \mathsf{R}_+, \mathcal{C}_r \neq \emptyset\}$.

1. (a) Montrer que l'ensemble R admet une borne inférieure ; on note ρ cette borne inférieure.
   (b) Établir l'énoncé suivant :

$$\forall n \in \mathsf{N}^*,\ \exists x_n \in \mathsf{C},\ \mathcal{B} \subset \overline{D}\left(x_n, \rho + \frac{1}{n}\right)\cdot$$

2. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ admet une sous-suite convergente.
   (b) En déduire l'existence d'un nombre complexe a tel que $\mathcal{B} \subset \overline{D}(a,\rho)$.
   (c) Démontrer l'unicité d'un tel a.

Autrement dit la partie $\mathcal{B}$ est contenue dans un *unique* disque fermé de rayon *minimum.*

B 2. Conclusion

1. Dresser sans démonstration la liste des différents *types* de transformations géométriques qui constituent le groupe $\mathfrak{I}_2$.
2. On suppose l'existence d'une partie *bornée* et non vide, $\mathcal{B}$, de C, qui est $\mathfrak{I}_2$-dédoublable. On adopte alors les notations suivantes :
   $$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2, \text{ avec } \tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ dans } \mathfrak{I}_2 \text{ vérifiant } \mathcal{B}_i = \tau_i(\mathcal{B}) \text{ pour } i = 1,2.$$
   On remarquera que, pour $i = 1, 2$, $\tau_i(\mathcal{B})$ est *strictement* contenu dans $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que les isométries τ_i ne peuvent être que des rotations différentes de l'identité. On note ω_i le centre de τ_i pour $i = 1, 2$.
   (b) En considérant l'unique disque $D(a,\rho)$ de rayon minimum contenant $\mathcal{B}$ [voir la section **B1**], montrer que $\omega_1 = a = \omega_2$.
   (c) Montrer que $\tau_1(\tau_2(\mathcal{B})) \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, relever une contradiction, puis conclure.

Partie II : Le paradoxe de Sierpinski-Mazurkiewicz [1914]

$\boxed{\text{On se propose de décrire une partie } \textit{non bornée} \text{ de } \mathsf{C} \text{ et } \mathfrak{I}_2\text{-dédoublable.}}$

Un nombre complexe ξ est dit *transcendant* si le seul polynôme à coefficients rationnels dont il est racine est le polynôme nul. On utilisera librement l'existence d'un nombre transcendant u de module égal à 1.

On note $\mathcal{P}_{\mathsf{N}}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans N, et l'on pose

$$\mathcal{D} = \{P(u), P \in \mathcal{P}_{\mathsf{N}}\}.$$

Soient t et r les transformations du plan complexe définies pour x dans C par $t(x) = x + 1$ et $r(x) = ux$ respectivement.

1. En exploitant le caractère transcendant de u, établir que $t(\mathcal{D}) \cap r(\mathcal{D}) = \emptyset$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ est $\mathfrak{I}_2$-dédoublable (on pourra commencer par montrer que tout polynôme P de $\mathcal{P}_{\mathsf{N}}$ peut être écrit sous l'une des deux formes suivantes : $P = R + 1$ ou $P = XS$ avec R et S dans $\mathcal{P}_{\mathsf{N}}$).

Partie III : Parties dédoublables de R

On se propose d'établir le résultat suivant [W. Sierpinski] :

$\boxed{\text{Aucune partie de } \mathsf{R} \text{ n'est } \mathfrak{I}_1\text{-dédoublable.}}$

Les sections **A**, **B** et **C** sont dévolues à la preuve de ce résultat.

A. La croissance d'un groupe

Soit G un groupe de loi interne notée multiplicativement et d'élément neutre noté 1. Soit S une partie finie de $G \setminus \{1\}$, supposée symétrique au sens suivant : $\forall x \in S, x^{-1} \in S$.
Le sous-groupe de G engendré par S est alors l'ensemble des produits finis d'éléments de S (on convient que le produit vide vaut 1) ; on le note $< S >$.
La longueur relativement à S, $\ell_S(x)$, d'un élément x de $< S >$ est définie de la manière suivante : $\ell_S(1) = 0$, et, pour $x \neq 1$, $\ell_S(x)$ est le plus petit entier p tel que l'on puisse écrire $x = s_1 s_2 \cdots s_p$, avec s_k dans S pour $1 \leqslant k \leqslant p$.
Pour n entier strictement positif on pose $B_S(n) = \{x \in < S >, \ \ell_S(x) \leqslant n\}$, $\gamma_S(n) = \operatorname{Card} B_S(n)$ [le cardinal de $B_S(n)$] et $c_S(n) = (\gamma_S(n))^{\frac{1}{n}}$.

1. Établir l'inégalité :
$$\forall p, q \geqslant 1, \quad \gamma_S(p+q) \leqslant \gamma_S(p)\gamma_S(q).$$
2. Pour n dans N^*, on pose $u_n = \ln \gamma_S(n)$ et $v_n = \dfrac{u_n}{n}\cdot$
   (a) Soient n et p dans N^* ; en effectuant la division euclidienne de n par p, établir la majoration
   $$v_n \leqslant v_p + \frac{p}{n} v_1.$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $v = \inf\limits_{n \geqslant 1} v_n$.
3. Démontrer la convergence de la suite $(c_S(n))_{n \geqslant 1}$ vers une limite C_S, et vérifier l'inégalité $C_S \geqslant 1$.

Le groupe G est dit à *croissance sous-exponentielle* lorsque, pour chaque S, partie finie symétrique de $G \setminus \{1\}$, on a $C_S = 1$.
Il est dit à *croissance exponentielle* dans le cas contraire.

4. Que dire de la croissance de G s'il contient un sous-groupe à croissance exponentielle ?
5. Montrer qu'un groupe *abélien* est toujours à croissance sous-exponentielle.

B. La croissance du groupe $\mathfrak{I}_1$

On considère une partie S de $\mathfrak{I}_1 \setminus \{Id\}$, finie et symétrique.

1. Montrer que $\mathfrak{I}_1$ est formé des transformations $x \mapsto ux + v$, avec $u = \pm 1$ et $v \in \mathsf{R}$.
2. Soient $\varepsilon = \pm Id$ et s dans S ; prouver l'existence et l'unicité de t dans $\mathfrak{I}_1^+$ et de $\varepsilon' = \pm Id$ tels que $\varepsilon \circ s = t \circ \varepsilon'$.

On note T_0 la partie *finie* de $\mathfrak{I}_1^+$ obtenue en collectant les divers éléments t lorsque le couple (ε, s) décrit l'ensemble $\{\pm Id\} \times S$. On pose alors

$$T = \left\{\tau \in \mathfrak{I}_1^+, \tau \in T_0 \text{ ou } \tau^{-1} \in T_0\right\}$$

puis on considère les parties $B_S(n)$ de $\mathfrak{I}_1$ et $B_T(n)$ de $\mathfrak{I}_1^+$, pour n quelconque dans N^*.

3. Démontrer que
$$\forall \tau \in B_S(n), \quad \exists (\sigma, \varepsilon) \in B_T(n) \times \{\pm Id\}, \quad \tau = \sigma \circ \varepsilon.$$
4. En déduire que $\boxed{\text{le groupe } \mathfrak{I}_1 \text{ est à croissance sous-exponentielle.}}$

C. Conclusion

On suppose ici l'existence d'une partie $\mathcal{D}$ de R, non vide et $\mathfrak{I}_1$-dédoublable.
On adopte alors les notations :
$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \amalg \mathcal{D}_2$, avec τ_1, τ_2 dans $\mathfrak{I}_1$ tels que $\tau_i(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_i$ $(i = 1, 2)$.
Pour n dans N^* et $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dans $\{\tau_1, \tau_2\}^n$ on pose $\gamma_s = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_n$.

1. Montrer que, pour tout couple (s, s') de $\{\tau_1, \tau_2\}^n$ tel que $s \neq s'$, on a $\gamma_s(\mathcal{D}) \cap \gamma_{s'}(\mathcal{D}) = \emptyset$.
2. On pose $S = \left\{\tau_1, \tau_1^{-1}, \tau_2, \tau_2^{-1}\right\}$. Déduire de la question précédente une minoration de la constante C_S pour le groupe $\mathfrak{I}_1$.
3. Relever une contradiction, et en déduire qu'aucune partie de R n'est $\mathfrak{I}_1$-dédoublable.

D. La croissance du groupe $\mathfrak{I}_2$

La croissance du groupe $\mathfrak{I}_2$ est-elle exponentielle ou bien sous-exponentielle ? (On pourra s'inspirer de la section**III.C**).

Partie IV : Un groupe « paradoxal »

Dans cette partie on se propose d'étudier un groupe Γ dont les propriétés seront exploitées dans la partie **V**.

Soit $SL_2(\mathsf{Z})$ le groupe des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients entiers et de déterminant égal à 1 ; son élément neutre est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note E l'espace des matrices colonnes réelles $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$.
On s'intéresse au sous-groupe Γ de $SL_2(\mathsf{Z})$ engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

A. Calculs préliminaires

1. Calculer A^k et B^k pour k dans Z.
2. On pose :

$$\Gamma_1 = \left\{A^k, k \in \mathsf{Z}\right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{B^k, k \in \mathsf{Z}\right\}, \quad E_1 = \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in E, |x| > |y|\right\}, \quad E_2 = \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in E, |x| < |y|\right\}$$

Démontrer les énoncés suivants :

(1) $$\forall M \in \Gamma_1 \setminus \{I\}, \quad \forall X_2 \in E_2, \quad MX_2 \in E_1$$

(2) $$\forall P \in \Gamma_2 \setminus \{I\}, \quad \forall X_1 \in E_1, \quad PX_1 \in E_2$$

B. Les éléments de Γ

Dans la suite, on convient des notations suivantes :

- ▷ Les M_i sont dans $\Gamma_1 \setminus \{I\}$, et les P_i sont dans $\Gamma_2 \setminus \{I\}$.
- ▷ Pour n dans N^*, on note Π_n le produit $(M_1P_1)(M_2P_2)\cdots(M_nP_n)$.

1. Justifier qu'un élément de Γ est de l'un des types suivants :

(0)	$U_0 = I$	**(1)**	$U_1 = P_0$	**(2)**	$U_2 = M_0$	**(3)**	$U_3 = P_0M_0$
(4)	$U_4 = \Pi_n, n \geqslant 1$	**(5)**	$U_5 = P_0\Pi_r, r \geqslant 1$	**(6)**	$U_6 = \Pi_s M_{s+1}, s \geqslant 1$	**(7)**	$U_7 = P_0\Pi_t M_{t+1}, t \geqslant 1$

2. On rappelle que les matrices M_i et P_j sont *toutes* différentes de I.
   (a) Montrer que $U_3 \neq I$.
   (b) En considérant U_6X_2 avec X_2 dans E_2, montrer que $U_6 \neq I$.
   (c) Montrer que $U_5 \neq I$ (on pourra considérer une matrice semblable à U_5 afin de se ramener au **b.**). Démontrer de même que $U_4 \neq I$.
   (d) En déduire que $U_7 \neq I$.
3. On considère le produit
$$\Pi'_n = \left(M'_1P'_1\right)\left(M'_2P'_2\right)\cdots\left(M'_nP'_n\right)$$
où $n \geqslant 1$, les M'_i sont dans $\Gamma_1 \setminus \{I\}$, et les P'_i sont dans $\Gamma_2 \setminus \{I\}$.
   (a) Établir que l'égalité $\Pi_n = \Pi'_n$ impose $M_i = M'_i$ et $P_i = P'_i$ pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant n$ (on pourra considérer la matrice $\Pi'_n\Pi_n^{-1}$).
   (b) En considérant $S = \left\{A, A^{-1}, B, B^{-1}\right\}$, en déduire que le groupe Γ est à croissance exponentielle. Quelle est la croissance du groupe $SL_2(\mathsf{Z})$?

C. Éléments d'ordre fini de Γ

On se propose de montrer que I est le seul élément d'ordre *fini* de Γ.

Soit $(U,k) \in \Gamma \times \mathbb{N}^*$ tel que $U^k = I$.

1. Montrer que U ne peut pas être du type U_4, U_7 ou U_3.
2. On suppose que U est du type U_6.
   (a) En considérant les éléments $V_1 = M_{s+1}U_6M_{s+1}^{-1}$, $V_2 = P_1^{-1}V_1P_1$, montrer que l'on a, successivement, $M_{s+1}M_1 = I$, puis $P_sP_1 = I$.
   (b) Relever alors une contradiction.
3. En déduire que U ne peut pas être de type U_5.
4. Conclure que $U = I$.

D. Conclusion

Grâce aux résultats du **B.2.** et par des calculs analogues à ceux du **B.3.** on pourrait montrer que :

(1) Pour chacun des types rencontrés au **B.1.**, l'écriture est *unique*.
(2) Un élément de Γ ne peut être que d'*un seul type*.
Dans la suite, le candidat pourra utiliser librement ces résultats.

▷ Lorsque $\mathcal{M} \subset \Gamma$ et $V \in \Gamma$, on pose $V\mathcal{M} = \{VU, U \in \mathcal{M}\}$.

Démontrer l'existence de quatre parties $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ de Γ, non vides et deux à deux disjointes, telles que

$$\Gamma = \mathcal{Q}_1 \cup A\mathcal{Q}_2 \quad \text{et} \quad \Gamma = \mathcal{R}_1 \cup B\mathcal{R}_2.$$

Partie V : Ensembles G-paradoxaux

Rappels

- ▷ Une opération ou action d'un groupe $(G, \cdot)$, de neutre noté 1, sur un ensemble non vide E est la donnée d'une application $\star : G \times E \to E$ telle que :
  (*i*) $\forall (g', g, x) \in G \times G \times E, \quad g' \star (g \star x) = (g'g) \star x$;
  (*ii*) $\forall x \in E, 1 \star x = x$.
- ▷ les G-orbites de E sont alors les ensembles $\mathcal{O}_x = \{g \star x, g \in G\}$ pour x dans E, elles constituent une partition de E.

Si le groupe G opère sur E on le fait aussi opérer de manière naturelle sur l'ensemble des parties de E en posant

$$\forall g \in G, \quad \forall X \subset E, \quad g \star X = \{g \star x, x \in X\}.$$

Définition

Avec les notations précédentes, on convient de dire qu'une partie $\mathcal{P}$ de E est G-*paradoxale* lorsqu'elle contient des parties $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ non vides et disjointes pour lesquelles il existe :

1. Des entiers $m, n \geqslant 1$;
2. des partitions de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$, $(\mathcal{Q}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $(\mathcal{R}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$;
3. des suites finies d'éléments de G,$(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $(h_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ vérifiant
   $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i \star \mathcal{Q}_i$ et $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} h_j \star \mathcal{R}_j$.

Autrement dit, et de façon imagée, $\mathcal{P}$ est G-paradoxale lorsqu'elle contient des parties non vides et disjointes $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$, chacune pouvant être découpée en un nombre fini de morceaux puis réarrangée sous l'action de G de manière à reconstituer $\mathcal{P}$.

A. Exemples

1. Définir une opération du groupe Γ de la partie **IV.** sur l'ensemble Γ de sorte que Γ soit un ensemble Γ-paradoxal.
2. Soit E un ensemble non vide, et G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_E$; montrer que toute partie G-dédoublable de E est G-paradoxale pour une action de G qui est à préciser.

   Commentaire : En adaptant de façon mineure l'argumentation proposée au **III.** on pourrait montrer le résultat suivant [W. SIERPINSKI 1954] :

   $$\boxed{\text{R ne contient aucune partie } \mathfrak{I}_1\text{-paradoxale.}}$$
3. On suppose que le groupe Γ opère sur un ensemble non vide E, et que l'hypothèse suivante est vérifiée :

   $$\forall U \in \Gamma \setminus \{I\}, \quad \forall x \in E, \quad U \star x \neq x.$$

   Montrer que l'ensemble E est Γ-paradoxal.

   Indication : On pourra considérer une partie T de E telle que l'intersection de T avec chacune des G-orbites est un singleton, et l'on ne soulèvera pas de difficulté relative à l'existence d'une telle partie.

B. Le plan hyperbolique est Γ-paradoxal

On note $H^2 = \{x \in \mathsf{C}, \mathrm{Im}(x) > 0\}$ (le demi-plan de POINCARÉ).

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathsf{Z})$; montrer que l'on définit une bijection h_M de H^2 sur lui-même en posant :

   $$\forall x \in H^2, \quad h_M(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Dans la suite on pourra utiliser sans justification le fait que l'application $M \mapsto h_M$ définit un morphisme du groupe $(SL_2(\mathsf{Z}), \cdot)$ vers le groupe symétrique $(\mathfrak{S}_{H^2}, \circ)$.

2. (a) Montrer que le noyau du morphisme cité ci-dessus est $\{\pm I\}$.
   (b) Montrer que ce morphisme induit un isomorphisme du sous-groupe Γ sur son image, que l'on notera $\overline{\Gamma}$.
3. Soit M dans $SL_2(\mathsf{Z})$ tel que l'homographie h_M fixe au moins un point de H^2.
   (a) Établir l'alternative : ($|\operatorname{tr}(M)| < 2$ ou bien $h_M = Id$).
   (b) Prouver que h_M est d'ordre fini dans le groupe $(\mathfrak{S}_{H^2}, \circ)$.
4. Démontrer qu'aucun élément de $\overline{\Gamma} \setminus \{Id\}$ n'a de point fixe dans H^2.
5. Prouver que le demi-plan de POINCARÉ est Γ-paradoxal pour une opération de Γ que l'on précisera.

C. Une partie de R^2 bornée et Γ-paradoxale

▷ On note Δ la partie $[0,1[^2$ de R^2. On rappelle que l'on définit une relation d'équivalence, notée $\sim$, en posant :
$$\forall p, q \in \mathsf{R}^2, \quad p \sim q \Longleftrightarrow p - q \in \mathsf{Z}^2.$$
De plus Δ rencontre chaque classe d'équivalence selon un singleton.
Lorsque $p \in \mathsf{R}^2$, on note $\widehat{p}$ l'unique q de Δ tel que $p \sim q$.

▷ Pour $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans Γ et $p = (x, y)$ dans R^2, on pose
$$U \star p = (ax + by, cx + dy).$$

On admettra sans justification que l'on définit ainsi une opération du groupe Γ sur l'ensemble R^2, et que , si l'on note γ_U la bijection $p \mapsto U \star p$ de R^2 dans R^2, l'ensemble $\Gamma_g = \{\gamma_U, U \in \Gamma\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\mathsf{R}^2}$, version *géométrique* du groupe Γ.

1. Établir que :
$$\forall \gamma \in \Gamma_g, \quad \forall p, q \in \mathsf{R}^2, \quad p \sim q \Longrightarrow \gamma(p) \sim \gamma(q).$$

2. Lorsque $\gamma \in \Gamma_g$, on définit une application $\widehat{\gamma}$ de Δ dans Δ en posant, pour tout p de Δ, $\widehat{\gamma}(p) = \widehat{\gamma(p)}$.
Montrer que l'application $\gamma \mapsto \widehat{\gamma}$ est un morphisme injectif du groupe $(\Gamma_g, \circ)$ dans le groupe $(\mathfrak{S}_\Delta, \circ)$ des bijections de Δ. On note $\widehat{\Gamma_g}$ son image.

3. Démontrer que $\widehat{\Gamma_g}$ est un ensemble dénombrable.

4. On s'intéresse à l'ensemble $F = \left\{p \in \Delta, \exists \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma_g} \setminus \{Id\}, \widehat{\gamma}(p) = p\right\}$.
On note C_0 un cercle donné contenu dans Δ, et de rayon strictement positif. On rappelle que R n'est pas dénombrable.
   (a) Montrer que si $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathsf{N}}$ est une suite de droites affines de R^2, on a $\bigcup\limits_{n \in \mathsf{N}} (C_0 \cap \mathcal{D}_n) \neq C_0$.
   (b) En discutant l'équation $\widehat{\gamma}(p) = p$ selon la nature de γ (élément de $\Gamma_g \setminus \{Id\}$), montrer que
   $$C_0 \cap F \neq C_0.$$

5. En déduire que F est une partie d'intérieur vide dans R^2.

6. Montrer que l'on peut faire opérer le groupe Γ sur la partie *bornée* non vide $\mathcal{P} = \Delta \setminus F$ de telle sorte que :
$$\boxed{\mathcal{P} \text{ soit un ensemble } \Gamma\text{-paradoxal.}}$$

4.1.2 Corrigé de la première épreuve écrite

Partie I : Parties dédoublables de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

A. Etude d'un premier exemple
1.

(a) Par hypothèse : $2 = |x - y| \leqslant |x| + |-y| \leqslant 1 + 1 = 2$, ce qui impose : $|x| = |-y| = 1$, et : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, -y = \lambda x$ (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire d'une norme euclidienne). Ainsi : $\lambda = 1$, $y = -x$ puis $\dfrac{x+y}{2} = 0$.

(b) Par contraposition, supposons $w \in B = \tau(A)$ et écrivons $w = \tau(a)$ avec $a \in A$. $|w - \tau(0)| = |\tau(a) - \tau(0)| = |a| \leqslant 1$ (τ est une isométrie).

(c) Par hypothèse, $\tau(0) \in B$. Ainsi $\tau(0) \neq 0$ et on peut considérer le diamètre $[u, v]$ orthogonal à $[0, \tau(0)]$. Par construction : $|u - \tau(0)| > 1$ et $|v - \tau(0)| > 1$, u et v sont dans A.

(d) Comme τ est affine elle conserve le milieu et $\tau(0)$ est le milieu de $[\tau(u), \tau(v)]$. Or, $|\tau(u) - \tau(v)| = |u - v| = 2$, avec : $\tau(u)$ et $\tau(v)$ dans $B = \tau(A) \subset \overline{D}$. Selon le (a), 0 est le milieu du segment $[\tau(u), \tau(v)]$. De là : $\tau(0) = 0 \in B \cap A$, la contradiction suit.

2.

Si $\overline{D}$ est $\mathcal{I}_2$-dédoublable, on peut écrire : $\overline{D} = A \amalg B$ avec : $\tau_1(\overline{D}) = A$, $\tau_2(\overline{D}) = B$ (τ_1, τ_2 sont dans $\mathcal{I}_2$). On peut toujours supposer que 0 est dans A et on pose alors : $\tau = \tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ pour avoir : $\tau \in \mathcal{I}_2$, et $\tau(A) = B$. On sait alors que ces hypothèses mènent à une contradiction.

B. Cas des parties bornées
B 1. Disque enveloppant minimal
1.

(a) La partie $\mathcal{B}$ étant bornée, il existe $r_0 \geqslant 0$ tel que : $\mathcal{B} \subset \overline{D}(0, r_0)$ et donc $r_0 \in R$ puisque $0 \in \mathcal{C}_{r_0}$.

(b) $\inf R = \rho < \rho + \dfrac{1}{n}$; il existe donc r_n dans R tel que : $\rho \leqslant r_n < \rho + \dfrac{1}{n}$. De là : $\mathcal{C}_{r_n} \neq \emptyset$ et il existe x_n dans $\mathbb{C}$ tel que : $\mathcal{B} \subset \overline{D}(x_n, r_n) \subset \overline{D}\left(x_n, \rho + \dfrac{1}{n}\right)$.

2.

(a) et (b)
– Grâce au 1.(b), on dispose d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathcal{B}, |x_n - b| \leqslant \rho + \frac{1}{n}.$$

– Cette suite complexe est donc clairement bornée ($\mathcal{B} \neq \emptyset$) et si $\left(x_{\alpha(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est extraite, convergente, de limite notée a, l'énoncé $(*)$ donne immédiatement : $\forall b \in \mathcal{B}, |a - b| \leqslant \rho$.

(c) Par l'absurde, soit $a_1 \neq a_2$ vérifiant : $\mathcal{B} \subset \overline{D}(a_1, \rho)$ et $\mathcal{B} \subset \overline{D}(a_2, \rho)$. Clairement (faire un dessin) : $\mathcal{B} \subset \overline{D}(a_1, \rho) \cap \overline{D}(a_2, \rho) \subset \overline{D}(c, r)$ avec : $c = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, et $r = \sqrt{\rho^2 - \dfrac{|a_1 - a_2|^2}{4}} < \rho$. Contradiction.

B 2. Conclusion
1.

Pour $\mathcal{I}_2^+$: les translations, les rotations. Pour $\mathcal{I}_2^-$(isométries indirectes) : les réflexions, les symétries glissées dont la forme réduite est : $s \circ t = t \circ s$ (s : réflexion, t :translation).

2.

(a) La clef : $\tau_i(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_i \subsetneq \mathcal{B}$ pour $i = 1, 2$. Cela interdit : $\tau_i^2 = Id$ et τ_i ne peut donc pas être une réflexion. On en déduit aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \tau_i^n(\mathcal{B}) \subsetneq \mathcal{B}$, avec $\mathcal{B}$ bornée non vide. Il est donc impossible que τ_i soit une translation, même dans le "cas limite" $\tau_i = Id_{\mathbb{C}}$. En conséquence : τ_i ne peut pas être une symétrie glissée. Sinon, lorsque $\tau_i = s \circ t$ est sa forme réduite, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \tau_i^{2n}(\mathcal{B}) = t^{2n}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Bilan : τ_1 et τ_2 ne peuvent être que des rotations différentes de $Id_{\mathbb{C}}$.

(b) Soit $\overline{D}$ le disque fermé de rayon minimum contenant $\mathcal{B}$; on note a son centre et ρ son rayon (*confer* **B.**). Pour i fixé, $\mathcal{B} = \tau_i^{-1}(\mathcal{B}_i) \subset \tau_i^{-1}(\overline{D})$. Comme τ_i est une isométrie, $\tau_i^{-1}(\overline{D})$ est un disque fermé de rayon ρ (et de centre $\tau_i^{-1}(a)$). Par unicité de $\overline{D}$: $\tau_i^{-1}(\overline{D}) = \overline{D}$ et par unicité du centre de $\overline{D}$: $\tau_i(a) = a$. De là, selon (b), $a = \omega_i$ et donc : $\omega_1 = \omega_2$.

(c) Il en résulte que les rotations τ_i commutent et en particulier : $\tau_2 \circ \tau_1(\mathcal{B}) = \tau_1 \circ \tau_2(\mathcal{B})$. Or, $\tau_2(\tau_1(\mathcal{B})) = \tau_2(\mathcal{B}_1) \subset \tau_2(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_2$, et de même : $\tau_1(\tau_2(\mathcal{B})) \subset \mathcal{B}_1$. La contradiction résulte alors des hypothèses : $\mathcal{B} \neq \emptyset$ et $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$. Bilan : aucune partie bornée (non vide) de $\mathbb{C}$ n'est $\mathcal{I}_2$-dédoublable.

Partie II : Le paradoxe de SIERPINSKI-MAZURKIEWICZ

1.

Par l'absurde, il existe P, Q dans $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ tels que : $P(u) + 1 = uQ(u)$. Donc : $R(u) = 0$ avec : $R = 1 + P - XQ$ dans $\mathbb{Q}[X]$, ce qui contredit le statut de u puisque $R \neq 0$ ($R(0) = 1 + P(0) > 0$).

2.

Le coefficient constant de P est $\geqslant 1$ ou bien nul, ce qui justifie l'alternative. On pose : $\mathcal{D}_1 = \{(R+1)(u), R \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\} = t(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}_2 = \{(XS)(u), S \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\} = s(\mathcal{D})$. L'alternative ci-dessus donne : $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ et le 1. donne $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$. Comme s et t sont dans $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{D}$ est $\mathcal{I}_2$-dédoublable.

Partie III : Parties dédoublables de $\mathbb{R}$

A. La croissance d'un groupe
1.

Essentiellement : $B_S(p+q) \subset B_S(p)B_S(q)$ car avec des notations évidentes $s_1 \cdots s_{p+q} = (s_1 \cdots s_p)(s_{p+1} \cdots s_{p+q})$

2.

(a) $u_1 = v_1$, et $u_p = \log \gamma_S(p) \geqslant 0$. Si $n = pq + r$, $0 \leqslant r < p$, on a :

$$u_n \leqslant qu_p + u_r \leqslant \frac{n-r}{p} u_p + rv_1 \leqslant nv_p + pv_1.$$

(b) A chaque $\varepsilon > 0$ on associe $p_\varepsilon \geqslant 1$ vérifiant $v_{p_\varepsilon} < v + \varepsilon$, et aussi $N_{\varepsilon, p_\varepsilon} \geqslant 1$ tel que : $\forall n \geqslant N$, $\dfrac{p_\varepsilon}{n} v_1 \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour $n \geqslant N$, $v \leqslant v_n \leqslant v + 2\varepsilon$ grâce au (a).

3.

$c_S(n) = \exp v_n \to \exp v \geqslant 1$.

4.

La définition montre qu'un groupe contenant un sous-groupe à croissance exponentielle est aussi à croissance exponentielle.

5.

Soit $S = \{s_1, \cdots, s_r\}$ une partie finie et symétrique de G. Comme G est abélien, tout élément de $B_S(n)(n \geqslant 1)$ s'écrit sous la forme : $s_1^{p_1} \cdots s_r^{p_r}$ avec $0 \leqslant p_1 + \cdots + p_r \leqslant n$ et $p_k \geqslant 0$. Donc, de façon très grossière, $\gamma_S(n) \leqslant (n+1)^r$ et $C_S = 1$.

B. La croissance du groupe $\mathcal{I}_1$

1.

Les applications affines : $s : x \mapsto ux + v$ avec u et v réels. Les isométries affines sont donc obtenues avec $u = \pm 1$, et les isométries directes avec $u = 1$.

2.

Il suffit de choisir $\varepsilon' = \pm Id$ de façon à avoir : $\varepsilon \circ s \circ \varepsilon' := t \in \mathcal{I}_1^+$. Avec les notations ci-dessus, $\varepsilon' = u\varepsilon$ s'impose clairement. Remarque : un tel couple (ε', t) est unique.

3.

Soit τ dans $B_S(n)$, $\tau = s_1 \circ \cdots \circ s_r$ avec $r \leqslant n$, $s_k \in S$. Selon le 2., on peut écrire : $s_1 = t_1 \circ \varepsilon'_1$; $\varepsilon'_1 \circ s_2 = t_2 \circ \varepsilon'_2$; $\cdots$; $\varepsilon'_{r-1} \circ s_r = t_r \circ \varepsilon'_r$ (avec des notations évidentes). De là : $\tau = t_1 \circ \cdots \circ t_r \circ \varepsilon'_r$. Finalement, $\sigma = t_1 \circ \cdots t_r$ et $\varepsilon = \varepsilon'_r$ conviennent puisque les t_k sont dans T.

4.

Selon 3., $B_S(n) \subset B_T(n) \circ \{\pm Id\}$, donc $\gamma_S(n) \leqslant 2\gamma_T(n)$ et $C_S \leqslant C_T$. De plus, $C_T = 1$ puisque $\mathcal{I}_1^+$ est Abélien. Donc $C_S = 1$ et le résultat suit puisque S est arbitraire.

C. Conclusion

1.

Notons r le plus petit des indices i tels que : $s_i \neq s'_i$. Chaque s_k laisse stable $\mathcal{D}$ et : $s_r(\mathcal{D}) \cap s'_r(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$. De là :

$$s_r\left(s_{r+1} \circ \cdots \circ s_n(\mathcal{D})\right) \cap s'_r\left(s'_{r+1} \circ \cdots \circ s'_n(\mathcal{D})\right) = \emptyset.$$

Or, pour $i < r$, $s_i = s'_i$ et on a affaire à des bijections, de sorte que : $\gamma_s(\mathcal{D}) \cap \gamma_{s'}(\mathcal{D}) = \emptyset$.

2.

Selon le 1., pour $s \neq s'$ on a $\gamma_s \neq \gamma_{s'}$. On vient donc de construire 2^n éléments distincts de $B_S(n)$ et donc $\gamma_S(n) \geqslant 2^n$, soit : $C_S \geqslant 2$.

3.

Supposer l'existence d'une partie $\mathcal{I}_1$-dédoublable de $\mathbb{R}$ permet donc de contredire le caractère sous-exponentiel de la croissance de $\mathcal{I}_1$ ($C_S = 1$).

D. Application

On sait qu'il existe une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$ non-vide et $\mathcal{I}_2$-dédoublable (*confer* II.). En reprenant mutatis mutandis les raisonnements de la section III.C., on dispose d'une partie S de $\mathcal{I}_2$ pour laquelle $C_S \geqslant 2$. Ainsi, $\mathcal{I}_2$ est à croissance exponentielle.

Partie IV : Un groupe "paradoxal"

A. Calculs préliminaires

1.

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } k \text{ dans } \mathbb{Z}.$$

On se contente de vérifier (1). $M = A^k$ avec $|k| \geqslant 1$; $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2$ avec $|x| < |y|$.

$MX_2 = \begin{pmatrix} x + 2ky \\ y \end{pmatrix}$; $|x + 2ky| \geqslant 2|k||y| - |x| > |y|$. $MX_2 \in E_1$.

B. Description de Γ

1.

On construit les éléments de Γ comme des "mots" dont les "lettres" sont puisées dans $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. La discussion porte sur le nombre de "lettres" puisées, I étant une "lettre" à part entière. Une "lettre" : I, P_0, M_0. Deux "lettres" : les précédents, ainsi que : P_0M_0, M_1P_1. Trois "lettres" : les précédents, ainsi que : $P_0(M_1P_1)$, $(M_1P_1)M_2$. Quatre "lettres" : les précédents, ainsi que : $P_0(M_1P_1)M_2$, $(M_1P_1)(M_2P_2)$. On fait ainsi apparaître les huit types annoncés, et aucun nouveau type n'apparaît lorsque la construction se poursuit.

2.

(a) $P_0M_0 = I$ nécessite $M_0 = P_0^{-1}$ et donc : $M_0 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{I\}$ (voir A.1.) ce qui n'est pas.

(b) Selon A.2., $M_{s+1}E_2 \subset E_1$ et $\Pi_s E_1 \subset E_1$, ainsi : $U_6 E_2 \subset E_1$ ce qui impose $U_6 \neq I$.

(c) On considère $M_0U_5M_0^{-1} = (M_0P_0)\Pi_r M_0^{-1}$ où $M_0 \in \Gamma_1 \backslash \{I\}$. Cette matrice est du type U_6 et elle est donc distincte de I, il en résulte : $U_5 \neq I$. On considère $M_0U_4M_0^{-1} = ((M_0M_1)P_1)\cdots(M_nP_n)M_0^{-1}$ avec $M_0 \in \Gamma_1 \backslash \left\{I, M_1^{-1}\right\}$. Cette matrice est encore du type U_6, ce qui impose : $U_4 \neq I$.

(d) On considère : $M_{t+1}U_7M_{t+1}^{-1} = (M_{t+1}P_0)\Pi_t$ qui est du type U_4. Donc : $U_7 \neq I$.

3.

(a) Par hypothèse : $I = \Pi'_n \Pi_n^{-1} = M'_1 P'_1 \cdots M'_n (P'_n P_n^{-1}) M_n^{-1} \cdots P_1^{-1} M_1^{-1}$. Les matrices M_i, P_i, M'_i, P'_i étant toutes distinctes de I on doit avoir : $P'_n = P_n$ (sinon : $\Pi'_n \Pi_n^{-1}$ est du type U_6). Il faut alors, pour la même raison, que : $M'_n = M_n$, etc $\cdots$

(b) Fixons $n \geqslant 1$ et considérons $\Pi_n = M_1 P_1 \cdots M_n P_n$ avec : $M_i = A^{\pm 1}$, $P_i = B^{\pm 1}$. Par construction : $\Pi_n \in B_S(2n)$ et les Π_n ainsi obtenus (n fixé) sont deux à deux distincts (question précédente). Ainsi, $\gamma_S(2n) \geqslant 2^{2n}$ et $C_S \geqslant 2$. Le groupe Γ (et donc aussi $SL_2(\mathbb{Z})$) est à croissance exponentielle.

C. Eléments d'ordre fini de Γ

1.

U_4^k (resp. U_7^k) est encore du type (4) (resp. du type (7)) et de ce fait on ne peut avoir : $U_4^k = I$ (resp. $U_7^k = I$). $U_3^k \neq I$ si $k = 1$ et même si $k \geqslant 2$ car alors U_3^k est du type (7).

2.

(a) $V_1 = M_{s+1} \Pi_s = ((M_{s+1} M_1) P_1)(M_2 P_2) \cdots (M_s P_s)$. Si $M_{s+1} M_1 \neq I$, V_1 est du type (4), ce qui interdit $V_1^k = I$ (question précédente) et contredit l'hypothèse. Ainsi $M_{s+1} M_1 = I$. $V_2 = (M_2 P_2) \cdots (M_s (P_s P_1))$ (en tenant compte de $M_{s+1} M_s = I$) ce qui impose $P_s P_1 = I$. Sinon, V_2 est du type (4) et $V_2^k \neq I$, puis $V_1^k \neq I$, ce qui n'est pas.

(b) On vient de décrire une procédure de conjugaison qui permet "d'effacer" la première et la dernière "lettre" d'un "mot" de type U_6 ou U_5. Précisément, si $s \geqslant 2$:

$$\begin{array}{ccccc} \text{type } U_6 & \rightarrow & \text{type } U_5 & \rightarrow & \text{type } U_6 \\ U = U_6 & & V_1 & & V_2. \end{array}$$

En réitérant, on construit un conjugué U' de $U = U_6$ qui est dans $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et qui est donc d'ordre fini ($U'^k = I$). De là : $U' = I$ (*confer* A.1.), puis $U_6 = I$, ce qui n'est pas. Autrement dit : U ne peut pas être du type U_6.

3.

$W = M_{r+1}^{-1} U_5 M_{r+1}$ est du type (6), ce qui interdit $W^k = I$ (question précédente) et interdit aussi : $U_5^k = I$.

4.

L'étude qui précède montre que U ne peut être que du type (0), (1) ou (2). Comme de plus I est le seul élément d'ordre fini de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (confer A.1.), c'est que : $U = I$.

D. Conclusion

$\mathcal{Q}_1$ (resp. $\mathcal{Q}_2$) est la partie formée des "mots" dont la "première lettre" est A (resp. A^{-1}). Plus précisément :

$\mathcal{Q}_1$	les $M_0 = A^k$ ($k \geqslant 1$)	les U_4 ou U_6 tels que : $\exists l \geqslant 1, M_1 = A^l$
$\mathcal{Q}_2$	les $M_0 = A^{-k}$ ($k \geqslant 1$)	les U_4 ou U_6 tels que : $\exists l \geqslant 1, M_1 = A^{-l}$

Notons U_4^- et U_6^- les types rencontrés dans la dernière case de ce tableau. On obtient alors :

AQ_2	A^{-k}	U_4^-, U_6^-	U_5, U_7	P_1	P_1M_2
	$(k \geqslant 0)$	si $l \geqslant 2$	si $l = 1$; $n, s \geqslant 2$	si $l = n = 1$	si $l = s = 1$

Bilan : $\mathcal{Q}_1 \cup A\mathcal{Q}_2 = \Gamma$. De même, on définit la partie $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) formée des "mots" dont la "première lettre" est B (resp. B^{-1}), et on obtient : $\mathcal{R}_1 \cup B\mathcal{R}_2 = \Gamma$. Finalement, le fait que les parties $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ soient disjointes résulte de la propriété admise dans le texte ainsi que de l'injectivité des suites $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\left(B^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$. Remarques :

- On a clairement : $\Gamma \backslash \{I\} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.
- Le B. prouve que Γ est le produit libre des groupes Γ_1 et Γ_2 (lemme du ping-pong), chacun étant isomorphe à $\mathbb{Z}$ (*confer* A.). Ainsi Γ est le groupe libre de rang 2 engendré par A et B et le résultat admis au D. suit.

Partie V : Ensembles G-paradoxaux

A. Exemples

1.

On fait opérer le groupe Γ sur lui-même par translations : $U * V = UV$, puis on exploite le IV.D.

2.

Comme $G \subset \sigma_E$, G opère sur E de façon naturelle ($g * x = g(x)$) et si $\mathcal{D}$ est G-dédoublable on dispose de parties $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ disjointes telles que : $g_1^{-1} * \mathcal{D}_1 = \mathcal{D} = g_2^{-1} * \mathcal{D}_2$ pour des g_i convenables dans G. $\mathcal{D}$ est donc G-paradoxale.

3.

Soit T une partie de E qui rencontre chaque Γ-orbite selon un singleton (l'axiome du choix valide l'existence de T tant qu'on ne sait rien sur E). Par construction : $E = \Gamma * T$. Avec les notations du IV.D., considérons les parties de E : $\mathcal{Q}_1 * T$; $\mathcal{Q}_2 * T$; $\mathcal{R}_1 * T$; $\mathcal{R}_2 * T$. Comme l'action est supposée être sans points fixes (hypothèse de l'énoncé), ces quatre parties de E sont deux à deux disjointes. En effet, pour fixer les idées, si : $U_1 * t_1 = U_2 * t_2$ avec : $t_1, t_2 \in T$ et : $U_1 \in \mathcal{Q}_1$, $U_2 \in \mathcal{Q}_2$, alors $(U_2^{-1}U_1) * t_1 = t_2$ et donc $t_1 = t_2$ (ils sont dans la même Γ-orbite), puis $U_1 = U_2$ (l'action est sans points fixes), ce qui assure la contradiction puisque : $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 = \emptyset$. Comme $\Gamma = \mathcal{Q}_1 \cup A\mathcal{Q}_2 = \mathcal{R}_1 \cup B\mathcal{R}_2$, on obtient, via l'action de Γ sur E : $E = (\mathcal{Q}_1 * T) \cup (A * (\mathcal{Q}_2 * T))$ et $E = (\mathcal{R}_1 * T) \cup (B * (\mathcal{R}_2 * T))$. Bilan : E est Γ-paradoxal, avec : $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1 * T) \amalg (\mathcal{Q}_2 * T)$; $\mathcal{Q} = (\mathcal{R}_1 * T) \amalg (\mathcal{R}_2 * T)$, les partitions étant évidentes ($m = n = 2$) ; $g_1 = h_1 = I$; $g_2 = A$, $h_2 = B$.

B. Le plan hyperbolique est Γ-paradoxal

1. et 2.(a)

trivial, simple calcul, usuel de surcroît.

(b) $-I \notin \Gamma$ puisque $(-I)^2 = I$ et qu'il n'y a pas d'éléments d'ordre fini dans $\Gamma \backslash \{I\}$ (*confer* IV.C.). L'injectivité du morphisme restreint à Γ en résulte.

3.

(a) Procédons de façon "culinaire". Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$ et x dans $\mathbb{H}^2$ avec $h_M(x) = x$, cela s'écrit : $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ (E). Cas 1 : $c = 0$ et donc $a = d(= \pm 1)$, puis $b = 0$, ainsi : $h_M = id$. Cas 2 : $c \neq 0$; les racines complexes de (E) sont donc x et $\overline{x} \neq x$, elles sont non-réelles et donc $0 > \Delta = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4$, et $|tr(M)| < 2$.

(b) Notoirement : $M^2 - (tr(M))M + I = 0$ $(det(M) = 1)$. Si $tr(M) = 0$, $M^2 = -I$ et donc $h_M^2 = id$. Si $tr(M) = \pm 1$ et même $tr(M) = 1$ (quitte à prendre $-M$), alors $M^2 = M - I$ donc $M^3 = M^2 - M = -I$, d'où $h_M^3 = id$. Si $|tr(M)| \geqslant 2$ alors $h_M = id$.

4.

Soit h dans $\overline{\Gamma} \setminus \{id\}$; si h fixe un point de $\mathbb{H}^2$, $h \neq id$ est d'ordre fini dans le groupe $\overline{\Gamma}$ (3.(b)) et la contradiction résulte de l'isomorphisme en Γ et $\overline{\Gamma}$, puisque dans $\Gamma \setminus \{id\}$ il n'y a pas d'éléments d'ordre fini.

5.

Grâce au morphisme $U \to h_U$ de Γ vers $\overline{\Gamma} \subset (\sigma_{\mathbb{H}^2}, \circ)$, on fait opérer Γ sur $\mathbb{H}^2$ en posant : $U * x = h_U(x)$. Selon 4., cette action est sans points fixes et donc $\mathbb{H}^2$ est Γ-paradoxal (*confer* V.A.3.). Remarque : les parties qui rendent Γ-paradoxal l'ensemble $\mathbb{H}^2$ peuvent être prises boréliennes et l'axiome du choix est donc ici totalement superflu.

C. Une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et Γ-paradoxale

1.

C'est le point-clef. Ecrivons $\gamma = \gamma_U$ avec $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; γ est linéaire et $\gamma(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ puisque $U \in M_2(\mathbb{Z})$. Donc, si $p \sim q$: $\gamma(p) - \gamma(q) = \gamma(p-q) \in \gamma(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$.

2.

Selon 1., $\forall a, b \in \mathbb{R}^2, a \sim b \Rightarrow \widehat{\gamma(a)} = \widehat{\gamma(b)}$ et en particulier :
$\forall a \in \mathbb{R}^2, \widehat{\gamma(\widehat{a})} = \widehat{\gamma(a)}$. Pour γ_1, γ_2 dans Γ_g et p dans Δ :

$$\widehat{\gamma_1} \circ \widehat{\gamma_2}(p) = \widehat{\gamma_1}(\widehat{\gamma_2}(p)) = \widehat{\gamma_1}(\widehat{\gamma_2(p)}) = \widehat{\gamma_1(\widehat{\gamma_2(p)})} = \widehat{\gamma_1(\gamma_2(p))} = \widehat{\gamma_1 \circ \gamma_2}(p).$$

Ainsi, $\widehat{\gamma_1} \circ \widehat{\gamma_2} = \widehat{\gamma_1 \circ \gamma_2}$. En conséquence : si $\gamma \in \Gamma_g$, $\widehat{\gamma} \circ \widehat{\gamma}^{-1} = \widehat{id_{\mathbb{R}^2}} = id_\Delta = \widehat{\gamma}^{-1} \circ \widehat{\gamma}$. Donc $\widehat{\gamma}$ est bijective de bijection réciproque $\widehat{\gamma^{-1}}$. De là, l'application : $\gamma \mapsto \widehat{\gamma}$ est un morphisme du groupe Γ_g vers le groupe $(\sigma_\Delta, \circ)$. Reste donc à prouver le caractère injectif de ce morphisme : Λ. Soit γ dans Γ_g tel que $\widehat{\gamma} = id_\Delta$. Cas 1 : $\gamma(\Delta) \subset \Delta$, alors $\widehat{\gamma} = \gamma|_\Delta^\Delta$ et γ, linéaire, fixe tous les points de Δ, donc une base de $\mathbb{R}^2$: $\gamma = id_{\mathbb{R}^2}$. Cas 2 : $\gamma(\Delta)$ n'est pas inclus dans Δ. Le parallélogramme $\gamma(\Delta)$ rencontre selon un polygone non aplati l'un des huit carrés C_k qui entourent Δ. On note $P = \gamma(\Delta) \cap C_{k_0}$ ce polygone et τ_0 la translation de vecteur dans $\mathbb{Z}^2$ telle que : $\tau_0(P) \subset \Delta$. Par construction : (1) $P' = \gamma^{-1}(P)$ est un polygone non aplati contenu dans Δ et (2) $\widehat{\gamma}$ et $\tau_0 \circ \gamma$ coïncident sur P'. Comme $\widehat{\gamma} = id_\Delta$, l'application affine $\tau_0 \circ \gamma$ fixe au moins trois points non alignés du plan complexe (de P'), d'où : $\tau_0 \circ \gamma = id_{\mathbb{C}}$, puis $\gamma = \tau_0^{-1}$ et enfin $\tau_0^{-1} = id_{\mathbb{C}}$ puisque γ est linéaire, c'est-à-dire $\gamma = id_{\mathbb{C}}$. Les groupes Γ_g et $\widehat{\Gamma_g}$ sont donc isomorphes via Λ.

3.

Il suffit de montrer que Γ est dénombrable. Notons $S = \left\{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}\right\}$. $\Gamma = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_S(n)$, où chaque ensemble $B_S(n) = \{U \in \Gamma, l_S(U) \leqslant n\}$ est fini. Le résultat suit puisque : une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.

4.

(a) Une droite coupe le cercle C_0 en au plus deux points et donc, pour chaque n, $C_0 \cap \mathcal{D}_n$ est fini. De là, $\cup_{n\in\mathbb{N}}(C_0 \cup \mathcal{D}_n)$ est dénombrable, alors que C_0 ne l'est pas puisque : si $p_0 \in C_0$, $C_0 \backslash \{p_0\}$ est équipotent à une droite (par projection stéréographique) et donc à $\mathbb{R}$. Bilan : $\cup_{n\in\mathbb{N}}(C_0 \cap \mathcal{D}_n) \subsetneq C_0$.

(b) Pour γ dans Γ_g, notons $Fix(\widehat{\gamma})$ l'ensemble des points fixes de $\widehat{\gamma}$. Ainsi : $F = \cup_{\gamma\in\Gamma_g\backslash\{id_{\mathbb{C}}\}} Fix(\widehat{\gamma})$. Pour p dans Δ et γ dans $\Gamma_g \backslash \{id_{\mathbb{C}}\}$: $p \in Fix(\widehat{\gamma}) \Leftrightarrow \gamma(p) \sim p \Leftrightarrow (\gamma - id)(p) \in \mathbb{Z}^2$. Finalement : $Fix(\widehat{\gamma})$ est la trace sur Δ de la préimage de $\mathbb{Z}^2$ par l'endomorphisme $L = \gamma - id$ de $\mathbb{R}^2$. Comme $L \neq 0$, deux cas sont possibles. Cas 1 : $KerL = \{0\}$. $L^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ est équipotent à $\mathbb{Z}^2$. Cas 2 : $KerL := D$ est une droite vectorielle. Pour chaque p de $\mathbb{Z}^2$, $L^{-1}(\{p\})$ est une droite affine dirigée par D et donc $L^{-1}(\mathbb{Z}^2)$ est une réunion dénombrable de droites affines, toutes parallèles à D. Comme $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable, on peut écrire : $L^{-1}(\mathbb{Z}^2) = \cup_{m\in\mathbb{N}} D_m$. Bilan : $F = F_0 \cup F_1$, où F_0 est une partie dénombrable de Δ et $F_1 = \cup_{m\in\mathbb{N}}(\Delta \cap D_m)$. En conséquence : $C_0 \cap F = (C_0 \cap F_0) \cup (C_0 \cap F_1)$ et comme $C_0 \subset \Delta$, on a : $C_0 \cap F_1 = \cup_{m\in\mathbb{N}}(C_0 \cap D_m)$. Pour respecter l'homogénéité des écritures, on est donc amené à dire que : $C_0 \cap F_0 = \cup_{p\in F_0\cap C_0}(C_0 \cap T_p)$, où T_p est la tangente en p à C_0. Comme $F_0 \cap C_0$ est dénombrable (avec F_0) et qu'une réunion de deux ensembles dénombrables est encore dénombrable, on peut finalement écrire : $C_0 \cap F = \cup_{n\in\mathbb{N}}(C_0 \cap \mathcal{D}_n)$, où : $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de droites affines de $\mathbb{R}^2$. De là, via le (a), $C_0 \cap F \subsetneq C_0$.

5.

On vient de démontrer que chaque cercle C_0 de rayon strictement positif, contenu dans Δ, n'est pas inclus dans F. Ainsi, F est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^2$ (on a réussi à se passer du théorème de Baire...).

6.

Selon le 5., on a en particulier $F \subsetneq \Delta$ (et même $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ dans Δ), donc $\mathcal{P} = \Delta \backslash F \neq \emptyset$. Pour U dans Γ et p dans Δ, on pose : $U * p = \widehat{\gamma}_U(p)$. On définit ainsi une opération du groupe Γ sur l'ensemble Δ puisque les applications suivantes sont des morphismes de groupes (la première est même un isomorphisme) :
$\begin{array}{ccc} \Gamma & \rightarrow & \Gamma_g \\ U & \mapsto & \gamma_U \end{array}$; $\begin{array}{ccc} \Gamma_g & \rightarrow & (\sigma_\Delta, \circ). \\ \gamma & \mapsto & \widehat{\gamma} \end{array}$ Montrons que $\mathcal{P}$ est une partie stable sous cette action, au sens suivant : $\forall p \in \mathcal{P}$, $\forall U \in \Gamma$, $U * p \in \mathcal{P}$. Par l'absurde, il existe $U \in \Gamma$ et p dans $\mathcal{P}$ tels que : $U * p \in F$; d'où V dans $\Gamma \backslash \{I\}$ tel que : $\widehat{\gamma}_V(U * p) = U * p$. Cela s'écrit : $V * (U * p) = V * p$, soit $(U^{-1}VU) * p = p$ et donc : $p \in Fix(\widehat{\gamma}_W)$ avec $W = U^{-1}VU$ ce qui impose, par définition de $\mathcal{P}$, $W = I$ puis $V = I$, ce qui n'est pas. Bilan : Le groupe Γ opère sur la partie bornée, non vide, $\mathcal{P}$; de plus, par construction, cette action est sans points fixes et $\mathcal{P}$ est Γ-paradoxale (*confer* V.A.3.).

4.1.3 Commentaires sur la première épreuve écrite

1- Le problème aborde le thème des paradoxes liés à la duplication géométrique d'un ensemble sous l'action d'un groupe G. Le texte en présente deux aspects : les ensembles G-dédoublables [Parties I,II,III] et plus généralement les ensembles G-paradoxaux [Partie V]. Les groupes retenus opèrent en préservant la métrique euclidienne sur $\mathsf{R}^{1,2}$, la métrique hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$, ou bien seulement l'aire sur R^2.

(a) L'existence d'un ensemble G-paradoxal impose une croissance exponentielle au groupe. Autrement dit, la croissance trop faible [*i.e.* sous-exponentielle] du groupe tient lieu d'obstruction à la G-duplication [*confer* Partie III où seul le cas du $\mathcal{J}_{1,2}$-dédoublement est envisagé].

(b) On expose une technique de construction systématique d'ensembles G-paradoxaux, technique qui remonte à Von Neumann (1929) : c'est le groupe qui se révèle paradoxal lorsqu'on le fait agir sur lui même par translations. Typiquement, il contient un clone du groupe libre de rang deux $F_2 = \mathsf{Z} * \mathsf{Z}$. Un tel groupe rend alors paradoxal **chaque** ensemble E sur lequel il opère **sans points fixes** dans la mesure où E n'est alors qu'un "empilement" de copies du groupe : ses orbites.

Dans le texte, le groupe Γ est précisément du type F_2 [Partie IV] et on le fait agir sans points fixes sur le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ [action isométrique] puis sur une partie bornée de R^2. Cette dernière action préserve seulement l'**aire** et la partie I montre que l'on ne pouvait espérer une conservation de la métrique euclidienne. Le paradoxe de Sierpinski-Mazurkiewicz présenté à la Partie II relève de la même idée, mais exploitée avec un demi-groupe.

2- Signalons un exemple de question encore ouverte (à notre connaissance) et étroitement liée au texte : existe-t-il un partie bornée de R^2 qui soit $\mathcal{J}_2$-paradoxale ?

On peut montrer que cela revient à tenter de **dédoubler** une partie bornée de R^2 sous l'action de transformations planes qui sont dans $\mathcal{J}_2$, mais seulement **par morceaux**.

Ce texte (suffisamment long) laisse de côté divers aspects fondamentaux de la problématique montrant que celle-ci n'a rien d'anecdotique et qu'elle relève finalement d'une approche **géométrique** de la théorie des groupes.

Suivent quelques pistes

(a) Dans le langage présenté, on peut formuler une version faible du célèbre paradoxe de Banach-Tarski : la sphère S^2 est SO_3-paradoxale [La clef : $F_2 \hookrightarrow SO_3$ et l'on procède comme au V ...].

(b)

$\star$ Adoptons un point de vue **géométrique** et considérons un groupe G qui agit sur un ensemble E.

L'existence (resp. l'absence) de parties G-paradoxales est à relier à l'absence (resp. l'existence) de mesures **finiment** additives et G-invariantes sur E.

C'est en ces termes que l'on sait **caractériser** depuis Tarski (1938) les ensembles E qui sont G-paradoxaux.

$\star$ Le sujet se révèle très riche lorsqu'on pose [en suivant Von Neumann] le problème sur le groupe lui-même. Le résultat de Tarski s'énonce alors comme suit :

Les groupes non paradoxaux sont précisément les groupes moyennables.

C'est-à-dire les groupes G pour lesquels il existe une mesure universelle μ [c'est-à-dire définie sur l'ensemble de **toutes** les parties de G], **finiment** additive [$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ dès que $A \cap B = \emptyset$], invariante à gauche [$\mu(gA) = \mu(A)$ si $g \in G$] et vérifiant $\mu(G) = 1$ [ce qui écarte les cas triviaux $\mu = 0$ ou ∞ et peut aussi être vu comme une condition de normalisation].

Bien entendu, l'existence d'une telle mesure interdit clairement à G d'être paradoxal.

⋆ Si $F_2 \hookrightarrow G$, G est clairement paradoxal, **mais** ce n'est pas la seule possibilité. En 1980, Ol' shanskii a construit un groupe paradoxal dont **tous** les éléments sont d'ordre fini ! Autrement dit la classe des groupes moyennables ne coincide pas avec celle des groupes ne contenant pas une copie de F_2, mais c'est toutefois le cas pour les groupes matriciels (Tits 1972).

(c) Citons pour terminer le problème de (Lebesgue-)Ruziewicz : La mesure de Lebesgue est notoirement invariante par isométries euclidiennes, mais cette propriété la caractérise-t-elle parmi les mesures finiment additives ?

Une mesure μ finiment additive sur R^n ou la sphère S^n est dite **exotique** lorsqu'elle est définie sur l'ensemble des parties bornées et Lebesgue mesurables, qu'elle est invariante par isométries (euclidiennes), **mais** qu'elle ne coïncide pas avec la mesure de Lebesgue. Bien entendu, pour éviter un banal changement d'échelle, toutes les mesures sont supposées normaliser $[0,1]^n$ ou S^n.

⋆ RESULTAT 1 [Banach, 1923] : Il existe des mesures exotiques sur $\mathsf{R}^{1,2}$ et S^1.

⋆ RESULTAT 2 [de 1979 à 1985] : Il n'existe aucune mesure exotique sur les autres R^n ou S^n.

La liste des mathématiciens ayant apporté leur pierre à l'édifice est impressionnante : del Junco et Rosenblatt, Margulis, Sullivan, et pour finir Drinfeld !

BIBLIOGRAPHIE

⋆ Mycielski, J. et S. Wagon : Large free groups of isometries and their geometrical uses, Ens. Math. **30** (1984), 247-267.

⋆ Wagon, S. : The Banach-Tarski Paradox. Cambridge University Press, 1994.

⋆ Hadwiger, H., H. Debrunner et V. Klee : Combinatorial Geometry in the Plane, New York ; Holt, Rinehart and Winston, 1964.

⋆ de la Harpe, P. : Topics in Geometric Group Theory. The University of Chicago Press 2000.

⋆ ⋆ ⋆

Les candidats ont essentiellement traité les Parties I,II,III-A et IV. Les copies les plus fournies ne comportent que quelques incursions dans la dernière partie. Le sujet a été conçu pour présenter une difficulté progressive et éviter tout grappillage. De plus, le barème récompensait largement les candidats rigoureux ayant traité les deux premières parties.

Le problème comportait suffisamment de questions, dont certaines élémentaires ou ne faisant appel qu'à des qualités de rigueur, pour que les notes obtenues témoignent assez justement des compétences de chacun.

⋆ ⋆ ⋆

La Partie I demandait aux candidats des raisonnements géométriques élémentaires, la deuxième partie ne nécessitait d'eux que rigueur et la troisième les a plutôt surpris. En revanche, la quatrième partie qui était de nature purement matricielle a été largement abordée.

Comme l'année précédente, l'épreuve proposée était de nature profondément géométrique. Il faut peut-être y déceler une tendance qui ne serait pas sans lendemain compte tenu du public concerné...

⋆ ⋆ ⋆

À ces remarques générales, on peut ajouter des commentaires sur certaines questions abordées par les candidats.

PARTIE I :

A 1- (a) Les affirmations gratuites ont été sanctionnées.

(c) Peu traitée par les candidats.

(d) La considération de $\tau = \tau_2 o \tau_1^{-1}$ était attendue.

B [*B1*]

1- (b) De nombreuses erreurs ont été rencontrées, elles résultent d'une mauvaise compréhension de la notion de borne inférieure.

2- (a) Il ne faut pas abuser d'arguments topologiques abstraits qui masquent souvent des incompréhensions profondes.

(b) Les considérations vagues sur la convergence des disques $\overline{D}(x_n, \rho + 1/n)$ n'ont pas été retenues.

(c) Un dessin clair et adapté était déjà récompensé.

[*B2*]

1- De façon surprenante, trop de candidats oublient de citer les symétries glissées.

2- (a) Les parties $\mathcal{B}_i$ sont a priori bien mystérieuses et elles ne sont peut-être même pas fidèlement représentables sur un dessin !

PARTIE II :

1- "$R \in \mathsf{Z}[X]$ avec $R(u) = 0$" n'était pas suffisant pour relever une contradiction. Encore fallait-il s'assurer que R n'était pas le polynôme nul.

PARTIE III :

A 2- (b) Un agrégé du concours interne se doit de maîtriser les preuves quantifiées « par ε et $\alpha\ldots$ ».

5- Traitée par quelques rares copies.

À l'exception des questions **B** 1,2, la suite de la partie III exige une réelle compréhension du sujet, elle n'a été que très peu abordée.

PARTIE IV :

A 2- Il faut connaître l'inégalité : $|u| - |v| \leqslant |u \pm v|$.

B 2- "U_4 et $U_7 \neq I$" est rarement traité.

3- (a) Beaucoup trop d'arguments vagues.

4.2 Deuxième épreuve écrite

4.2.1 Énoncé de la deuxième épreuve écrite

Introduction et notations

Ce texte d'analyse fonctionnelle a pour objet l'étude de quelques propriétés des séries trigonométriques ; il se conclut par une application à la résolution d'un problème de DIRICHLET par une approche variationnelle, (partie **III**).

Dans tout ce qui suit on note :

- $\mathcal{C}([0,\pi],\mathsf{R})$ le R-espace vectoriel des applications continues du segment $[0,\pi]$ dans R ;
- E le R-espace vectoriel des applications f de $[0,\pi]$ dans R, continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$;

  Pour f appartenant à E on convient de désigner par f' la fonction définie sur $[0,\pi]$ par
  - si en x de $[0,\pi]$ f est dérivable, alors $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en ce point ;
  - si en x de $[0,\pi]$ f n'est pas dérivable, alors $f'(x) = 0$;
- ℓ^2_{R} le R-espace vectoriel des suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$de nombres réels telles que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ converge ;

  On rappelle que, si $\alpha = (\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $\beta = (\beta_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux éléments de ℓ^2_{R}, la série de terme général $(\alpha_n\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est absolument convergente. De plus l'application $(\alpha,\beta) \mapsto < \alpha,\beta >= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ est un produit scalaire sur ℓ^2_{R} et ℓ^2_{R} est complet pour la norme associée à ce produit scalaire ;
- pour tout entier $n \geqslant 1$, par e_n l'élément de E défini par $e_n(x) = \sin nx$.

Partie VI : Questions préliminaires. Exemples

A. Un lemme de CANTOR

Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres réels. Pour tout x de R et pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose
$f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, et on suppose que pour tout x réel la suite $(f_n(x))$ converge vers 0. On se propose de montrer que les suites (a_n) et (b_n) ont pour limite 0 en $+\infty$.

1. Montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que, pour tout x de R, $b_n \sin nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Dans cette question, on propose deux méthodes pour montrer que la suite (b_n) a pour limite 0 en $+\infty$

   (a) *Raisonnement par l'absurde*

   On suppose que la suite (b_n) ne converge pas vers 0.

   i. Montrer qu'il existe un réel strictement positif ε et une sous suite (b_{n_k}) de la suite (b_n) tels que $n_1 > 0$ et que l'on ait, pour tout entier k, $|b_{n_k}| \geqslant \varepsilon$ et $n_{k+1} \geqslant 3n_k$.

   ii. Construire pour tout entier k un intervalle $[a_k, b_k]$ de la forme $a_k = \dfrac{\pi}{6} + p_k\pi$, $b_k = \dfrac{5\pi}{6} + p_k\pi$, avec $p_k \in \mathsf{Z}$, tel que si $J_k = \dfrac{1}{n_k}[a_k, b_k]$ l'on ait, pour tout entier k, $J_{k+1} \subset J_k$. Vérifier que $|\sin n_k x| \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout x de J_k.

   iii. Établir que l'intersection $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} J_k$ n'est pas vide, et conclure à une contradiction.

(b) *Intervention du calcul intégral*

i. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} (b_n \sin nx)^2 \,\mathrm{d}\,x$.

ii. Conclure dans le cas où la suite (b_n) est bornée.

iii. Dans le cas général, on pose $b'_n = \inf(1, |b_n|)$. Vérifier que, pour tout x de R, $b'_n \sin nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclure.

B. L'espace H

1. (a) Soient $\alpha = (\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ un élément de ℓ^2_{R} et x un élément de $[0, \pi]$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n} e_n(x)$ converge absolument (on pourra utiliser l'inégalité $ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ pour deux nombres réels a et b).

   (b) On pose $\theta(\alpha)(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} e_n(x)$. Montrer que l'on définit ainsi une application θ de ℓ^2_{R} dans $\mathcal{C}([0, \pi], \mathsf{R})$.

   (c) Établir que θ est linéaire et injective.

   Dans toute la suite on notera H l'image de θ, et $\|\cdot\|_H$ la norme définie sur H, pour $f = \theta(\alpha)$, par $\|f\|_H = \sqrt{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2}$. Vérifier que H est complet pour cette norme.

2. Établir l'inclusion $E \subset H$. (On pourra montrer que tout élément f de E est la restriction à $[0, \pi]$ d'une unique fonction $\widetilde{f}$ 2π-périodique et impaire, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et développer $\widetilde{f}$ en série de FOURIER).

3. Montrer que l'application qui à un couple (f, g) d'éléments de E associe le nombre

$$(f|g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(t) g'(t) \,\mathrm{d}\,t$$

   est un produit scalaire sur E. Vérifier que la norme associée à ce produit scalaire coïncide avec la restriction à E de $\|\cdot\|_H$.

   Montrer que E est dense dans H pour la topologie associée à la norme $\|\cdot\|_H$

4. Pour f dans H, on pose $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$.

   (a) Prouver l'existence d'une constante k telle que l'on ait l'inégalité, valable pour tout f de H :

$$(*) \qquad\qquad \forall f \in H, \quad \|f\|_\infty \leqslant k\|f\|_H.$$

   (b) Pour tout élément a de $]0, \pi[$, on désigne par h_a l'élément de E défini en tout x par $h_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} & \text{si } \ x \leqslant a \\ \dfrac{\pi - x}{\pi - a} & \text{si } \ x > a \end{cases}$. En appliquant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ au produit scalaire $(f|h_a)$, pour f dans E, montrer que la plus petite valeur de k telle que l'on ait $(*)$ est $\pi/\sqrt{8}$.

5. On se propose de démontrer que si F est une application de classe $\mathcal{C}^2$ de R dans R telle que $F(0) = 0$, et si f est un élément de H, alors $F \circ f$ appartient à H.

   Soient f un élément de H et (f_n) une suite d'éléments de E convergeant vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_H$. On pose $g_n = F \circ f_n$.

(a) Vérifier que la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée.
On note A un réel vérifiant $\|f_n\|_\infty \leqslant A$ pour tout n, puis $M_1 = \sup\limits_{|t|\leqslant A} |F'(t)|$ et $M_2 = \sup\limits_{|t|\leqslant A} |F''(t)|$.

(b) Établir que, pour tous p, q dans N, on a l'inégalité :

$$\|g_p - g_q\|_H \leqslant \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} M_2 \|f_p\|_H + M_1\right) \|f_p - f_q\|_H$$

(c) Conclure.

(d) En déduire que H est une algèbre, *i.e.* que le produit fg de deux éléments f et g de H est un élément de H. (On pourra utiliser la relation $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$).

Partie VII : Pseudo-dérivée seconde au sens de Schwarz

Si f est une application continue de R dans R, on dit que f admet au point x une dérivée seconde au sens de Schwarz si, et seulement si, $\lim\limits_{h\to 0,\ h\neq 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe ; dans ce cas la limite est notée $f^{('')}(x)$.

1. Montrer que si f est deux fois dérivable sur R, $f^{('')}(x)$ existe en tout x de R, et en donner la valeur.

2. Soit f une application de R dans R possédant en tout x de R une pseudo-dérivée seconde au sens de Schwarz nulle.

   (a) Soient a et b des réels tels que $a < b$, ε un réel strictement positif. On pose

   $$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \varepsilon(x-a)(b-x)$$

   Vérifier que la fonction φ est continue et que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Calculer $\varphi^{('')}$.
   Montrer que φ ne peut avoir de maximum strictement positif sur $[a, b]$.

   (b) En déduire que f est affine.

3. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de réels tels que la série de fonctions de terme général $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur R vers une fonction f continue sur R. On pose alors

   $$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

   .

   (a) Justifier l'existence de F sur R et prouver sa continuité.

   (b) Pour x dans R et $h > 0$ on pose

   $$u(0) = 1, \quad u(x) = \frac{4}{x^2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta(x,h) = \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}.$$

   Vérifier la relation

   $$\Delta(x,h) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) u(nh).$$

(c) Si l'on pose $S_0(x) = 0$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ pour $n \geqslant 1$, justifier l'égalité

$$\Delta(x,h) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [S_n(x) - f(x)]\,[u(nh) - u((n+1)h)]\,.$$

(d) i. En remarquant que $u((n+1)h) - u(nh) = \int_{nh}^{(n+1)h} u'(x)\,\mathrm{d}\,x$, déduire de ce qui précède que, pour tout réel x, $F^{('')}(x)$ existe et vaut $f(x)$.

ii. Montrer que l'application qui au réel x associe $\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer sa dérivée seconde.

iii. Prouver finalement l'existence de réels α et β tels que pour tout réel x l'on ait

$$F(x) = \alpha x + \beta + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(e) En utilisant ce qui précède, établir que les suites (a_n) et (b_n) sont les coefficients de FOURIER de f, *i.e.* que pour tout n :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x.$$

Partie VIII : Application à un problème variationnel

On désigne par E_0 le sous-espace vectoriel de E des applications v de $[0,\pi]$ dans R, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $v(0) = v(\pi) = 0$.

On considère une application continue f de $[0,\pi]$ dans R telle que, pour tout x de $[0,\pi]$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

où $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels.

1. Montrer que, pour tout x de R, la série de terme général $(b_n \sin nx)_{n\geqslant 1}$ est convergente, et que sa somme coïncide avec l'unique application $\widetilde{f}$ de R dans R, impaire, 2π-périodique et prolongeant f.
   Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x.$$

2. *Le problème variationnel*
   On désigne par $J\ :\ E_0 \to \mathsf{R}$ la fonctionnelle définie par :

$$\forall v \in E_0, \quad J(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [(v'(x))^2 + (v(x))^2]\,\mathrm{d}\,x - \int_0^{\pi} f(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

   et on s'intéresse au problème de minimisation suivant :

$$(P) \quad \text{Trouver } u \in E_0 \text{ tel que, pour tout } v \in E_0,\ J(u) \leqslant J(v).$$

Établir, pour tout t de R et tous u, v de E_0, l'identité suivante :

$$J((1-t)u+tv) + \frac{t(1-t)}{2}\int_0^\pi [(v'(x)-u'(x))^2 + (v(x)-u(x))^2]\,\mathrm{d}\,x = (1-t)J(u) + tJ(v)).$$

3. *Unicité de la solution du problème (P)*
   Déduire de la question précédente que si u_1 et u_2 sont solutions de (P), alors :

$$\int_0^\pi [(u_1'(x)-u_2'(x))^2 + (u_1(x)-u_2(x))^2]\,\mathrm{d}\,x = 0$$

   et, par suite, $u_1 = u_2$.
4. *Caractérisation des solutions de (P)*
   (a) Montrer que pour tous u, v de E_0, l'on a, pour tout réel t :

$$J(u+tv) = J(u) + t\int_0^\pi (u'(x)v'(x) + u(x)v(x) - f(x)v(x))\,\mathrm{d}\,x + \frac{t^2}{2}\int_0^\pi (v'^2(x) + v^2(x))\,\mathrm{d}\,x.$$

   (b) En déduire que, pour u dans E_0, u est solution de (P) si, et seulement si, u vérifie :

$$(P') \qquad \forall v \in E_0, \quad \int_0^\pi (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))\,\mathrm{d}\,x = \int_0^\pi f(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

5. *Existence d'une solution de (P)*
   (a) Soit u une solution de (P). Déduire de la question précédente que nécessairement, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x = \frac{b_n}{n^2+1}.$$

   (b) Pour tout x de R, on pose $\widetilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2+1}\sin nx$. En écrivant

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}\sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2(n^2+1)}\sin nx$$

   montrer que $\widetilde{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur R, 2π-périodique et vérifie :

$$\begin{cases} -\widetilde{u}'' + \widetilde{u} = \widetilde{f} \\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

   (c) En déduire que la restriction u de $\widetilde{u}$ à $[0,\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$ et est solution, sur cet intervalle, du problème de Dirichlet :

$$(D) \qquad \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

   (d) Montrer que u est solution de (P'), et donc de (P).

4.2.2 Corrigé de la deuxième épreuve écrite

CORRIGE

Partie I.A

1. On a $f_n(0) = a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Donc, par différence, $b_n \, sin(nx) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2a. (i) Si la suite $(b_n)_n$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(b_{\varphi(n)})$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_{\varphi(n)}| \geq \varepsilon$.
Comme $\varphi(n) \to +\infty$ avec n, on peut en extraire une sous-suite, notée $(n_k)_k$ telle que :
$\forall k \geq 1$, $n_{k+1} \geq 3n_k$.
(ii) On recherche des intervalles $[a'_k , b'_k]$ de la forme : $a'_k = \dfrac{\pi}{6} + p_k \pi$, $b'_k = \dfrac{5\pi}{6} + p_k \pi$, avec $p_k \in \mathbb{Z}$ et, si $J_k = \dfrac{1}{n_k} [a'_k , b'_k] = [a_k , b_k]$. On a bien $b_k - a_k = \dfrac{2\pi}{3n_k}$.

Il est clair que si l'on trouve de tels entiers $p_k \in \mathbb{Z}$, on aura : $\forall x \in J_k$, $|sin(n_k \, x)| \geq \dfrac{1}{2}$.

Choisissons $p_1 = 0$ et supposons alors construits $J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_k$. Construisons J_{k+1} .La longueur de l'intervalle $n_{k+1} J_k$ est égale à $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \dfrac{2\pi}{3} \geq 2\pi$, donc il existe $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ tel que :
$[\alpha_{k+1} \ , \ \alpha_{k+1} + 2\pi] \subset n_{k+1} \, . \, J_k$

Soit $p'_{k+1} \in \mathbb{Z}$ l'entier tel que $p'_{k+1} \pi \leq \alpha_{k+1} < (p'_{k+1} + 1)\pi$.

Alors, si $p_{k+1} = p'_{k+1} + 1$, on a : $[p_{k+1} \pi , (p_{k+1} + 1)\pi] \subset [\alpha_{k+1} , \alpha_{k+1} + 2\pi]$.

Posons $a'_{k+1} = \dfrac{\pi}{6} + p_{k+1} \pi$, $b'_{k+1} = \dfrac{5\pi}{6} + p_{k+1} \pi$.

On a : $[a'_{k+1} , b'_{k+1}] \subset n_{k+1} \, . \, J_k$, et donc : $J_{k+1} = \dfrac{1}{n_{k+1}} [a'_{k+1} , b'_{k+1}] \subset J_k$.

Remarque : Pour la construction d'une suite d'entiers $(p_k)_k$, on peut aussi procéder de la façon suivante. Supposons construits $p_1 , \ldots , p_k$ dans Z avec $p_1 = 0$ satisfaisant les conditions demandées ; on doit chercher $p_{k+1} \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{1}{n_k}\left[\frac{\pi}{6} + p_k \, . \, \pi\right] \leq \frac{1}{n_{k+1}}\left[\frac{\pi}{6} + p_{k+1} \, . \, \pi\right] \leq \frac{1}{n_{k+1}}\left[\frac{5\pi}{6} + p_{k+1} \, . \, \pi\right] \leq \frac{1}{n_k}\left[\frac{5\pi}{6} + p_k \, . \, \pi\right] ,$$

ce qui équivaut à :

$$\alpha_k = p_k + \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1\right)\left(p_k + \frac{1}{6}\right) \leq p_{k+1} \leq p_k + \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1\right)\left(p_k + \frac{5}{6}\right) = \beta_k .$$

Comme $\beta_k - \alpha_k = \left(\dfrac{n_{k+1}}{n_k} - 1\right)\dfrac{4}{6} \geq \dfrac{4}{3} > 1$, un tel entier $p_{k+1} \in$ Z existe.

(iii) La suite $(J_k)_k$ est une suite d'intervalles non vides fermés emboîtés de longueur $\leq \dfrac{2\pi}{3n_k}$, donc tendant vers 0 : il en résulte que $\bigcap_{k \geq 1} J_k = \{x_0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Comme , $\forall k$, $|sin(n_k \, x_0)| \geq \dfrac{1}{2}$, il en résulte que $(b_{n_k} \, sin(n_k \, x_0))_k$ ne peut tendre vers 0 puisque $|b_{n_k} sin(n_k \, x_0)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.

2b. (i) On a $\int_0^{2\pi} [b_n \sin(nx)]^2\, dx = b_n^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx = \pi\, b_n^2$.

(ii) Si la suite (b_n) est bornée, d'après le théorème de convergence dominée, on déduit que $\int_0^{2\pi} [b_n \sin(nx)]^2\, dx \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc, d'après (i), $(b_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

(iii) Si $b'_n = Inf(1\ ,\ |b_n|)$, on a : $|b'_n \sin(nx)| \leq |b_n \sin nx|$ et donc $(b'_n \sin(nx))$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le raisonnement de (ii) implique que (b'_n) tend vers 0 et donc, pour $n \geq N$, $b'_n = b_n$, *i.e.* (b_n) tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Partie I.B

1a. Comme $\left|\frac{\alpha_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$, on a aussi $\left|\frac{\alpha_n}{n}\ e_n(x)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) = v_n$, terme général d'une série numérique convergente : la série $\left[\frac{\alpha_n}{n}\ e_n(x)\right]_{n\geq 1}$ converge absolument.

1b. D'après (1a), la série $\left[\frac{\alpha_n}{n}\ e_n(x)\right]_{n\geq 1}$ converge normalement sur $[0\ ,\ \pi]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto e_n(x) = \sin nx : [0\ ,\ \pi] \to \mathbb{R}$ est continue. Donc, sa somme $\theta(\alpha)$ est continue sur $[0\ ,\ \pi]$.

1c. θ est évidemment linéaire.

θ est injective : puisque la série converge normalement sur $[0\ ,\ \pi]$, elle converge uniformément sur $[0\ ,\ \pi]$, on a donc :

$$\forall k \geq 1\ ,\ \int_0^{\pi} \sin kx\ .\ \theta(\alpha)(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n} \int_0^{\pi} \sin kx\ .\ \sin nx\, dx = \frac{\alpha_k}{k} \int_0^{\pi} (\sin kx)^2\, dx = \frac{\pi}{2}\ \frac{\alpha_k}{k}$$

d'où l'injectivité.

Par ailleurs, H est complet pour cette norme car ℓ^2 est complet et θ est injective et linéaire.

2. Soit $f \in E$.

Posons $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\ ,\ x \in [0\,,\pi] \\ -f(-x)\ ,\ x \in [-\pi\,,0] \end{cases}$ et $\tilde{f}$ prolongée à $\mathbb{R}$ tout entier par 2π périodicité, ce qui est possible car $\tilde{f}(-\pi) = -f(\pi) = 0 = f(\pi) = \tilde{f}(\pi)$.

$\tilde{f}$ est continue, C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π–périodique. Elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier (théorème de Dirichlet) en chaque point $x \in \mathbb{R}$, *i.e.* :

$$\tilde{f}(x) = \sum_0^{\infty} a_n \cos nx + \sum_1^{\infty} b_n \sin nx\ .$$

Mais $\tilde{f}$ étant impaire :

$$a_n = a_n(\tilde{f}\,) = 0 \ \text{ et } \ b_n = b_n(\tilde{f}\,) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx\ .$$

D'autre part, $\tilde{f}$ étant C^1 par morceaux, par intégration par parties, on obtient :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\tilde{f}(x)\ \frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}\,'(x)\ \frac{\cos nx}{n}\ dx$$

$$i.e. \quad b_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\tilde{f}}\,'(x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} f\,'(x) \cos nx\, dx = \frac{\alpha_n}{n} \quad ,\quad n \geq 1$$

où $\tilde{\tilde{f}}\,'(x) = \begin{cases} f\,'(x) & ,\ x \in [0\,,\pi] \\ f\,'(-x) & ,\ x \in [-\pi\,,0] \end{cases}$

et comme $\tilde{\tilde{f}}\,'$ $(= \tilde{f}\,')$ est continue par morceaux sur $[-\pi\,,\,\pi]$, la suite de ses coefficients de Fourier est dans ℓ^2 et donc $(\alpha_n) \in \ell^2$ (inégalité de Parseval). D'où $E \subset H$.

3. Soit $(f\,,g) \longmapsto \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\,'\,g'\,dt : E \times E \to \mathbb{R}$: cette application est bilinéaire, symétrique et définie positive puisque, si $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f\,'|^2\,dt = 0$, cela implique, $f\,'$ étant continue par morceaux sur $[0\,,\,\pi]$, que $f\,'(t) = 0$ sauf, peut-être, en un nombre fini de points de $[0\,,\,\pi]$ et donc, f étant continue sur $[0\,,\,\pi]$ est constante, et $f(0) = 0$ donc $f = 0$ sur $[0\,,\,\pi]$.

De plus, en reprenant les calculs précédents, d'après l'égalité de Parseval appliquée à la fonction paire $\tilde{\tilde{f}}\,'$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\tilde{f}}\,'|^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(\tilde{\tilde{f}}\,')|^2$$

car $a_0(\tilde{\tilde{f}}\,') = 0$ puisque $a_0(\tilde{\tilde{f}}\,') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\tilde{f}}\,'\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}\,'\,dx = \frac{1}{2\pi}\,[\,\tilde{f}(\pi) - \tilde{f}(-\pi)\,] = 0$

et $b_n(\tilde{\tilde{f}}\,') = 0$ puisque $\tilde{\tilde{f}}\,'$ est paire.

Or $a_n(\tilde{\tilde{f}}\,') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\tilde{f}}\,'\,\cos nx\,dx = \alpha_n$, d'où $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\tilde{f}}\,'|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f\,'|^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$

i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f\,'|^2\,dx = \|f\|_H^2$.

Il en résulte immédiatement que E est dense dans H en prenant $f_N = \sum_1^N \frac{\alpha_n}{n}\,e_n \to f$ dans H, et en remarquant que f_N appartient à E, pour tout entier N.

4a. Pour tout $x \in [0\,,\,\pi]$:

$$|f(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\alpha_n}{n}\,|\sin nx|\right| \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_1^\infty \alpha_n^2\right)^{1/2} \Rightarrow \|f\|_\infty \le k\|f\|_H \text{ avec } k = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\,.$$

Remarque : On peut aussi établir l'inégalité (*) en se limitant aux fonctions $f \in E$ qui, d'après la question précédente, est dense dans H.

Et si $f \in E$, on a : $\forall x \in [0\,,\,\pi]\,,\, f(x) = \int_0^x f\,'(t)\,dt$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in [0\,,\,\pi]\ ,\ |f(x)| \le \left(\int_0^x |f\,'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^x 1^2\,dt\right)^{1/2}.$$

D'où $\|f\|_\infty \le \sqrt{\pi}\ \|f\|_H$.

4b. On a $h_a \in E$, et pour tout $f \in E$: $|(f|h_a)| \le \|f\|_H\,\|h_a\|_H$ (d'après 3.).

Or $(f|h_a) = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^a \frac{f\,'}{a}\,dx - \int_a^\pi \frac{f'}{\pi - a}\,dx\right\} = \frac{2}{\pi}\,f(a)\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\pi - a}\right] = \frac{2}{a(\pi - a)}\,f(a)$

et $\|h_a\|_H^2 = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^a \frac{1}{a^2}\,dx + \int_a^\pi \frac{1}{(\pi - a)^2}\,dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{a} + \frac{1}{\pi - a}\right\} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{a(\pi - a)} = \frac{2}{a(\pi - a)}$.

D'où, pour tout $f \in E$ et pour tout $a \in\,]0\,,\,\pi[$: $|f(a)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a(\pi - a)}\ \ \|f\|_H \le \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ \|f\|_H$ puisque

$\sqrt{a(\pi-a)} \leq \frac{\pi}{2}$.

Par suite, $(*)$ $\|f\|_\infty \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \|f\|_H$ pour tout $f \in E$, et donc aussi pour tout $f \in H$ puisque E est dense dans H .

En particulier, si $f = h_{\pi/2}$ dans $(*)$, on obtient $\|f\|_\infty = 1$ et $\|h_{\pi/2}\|_H = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, d'où l'égalité dans $(*)$.

Ainsi, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ réalise la meilleure constante pour $(*)$ de 4a. .

5. Il est immédiat de vérifier ($F(0) = 0$) que, puisque $f_n \in E$, $F \circ f_n = g_n \in E$ et que, sauf pour un nombre fini de points au plus, on a : $g'_n(x) = F'(f_n(x)) \,.\, f'_n(x)$.

(a) Puisque (f_n) converge vers f dans H et que $\|f_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \|f_n\|_H$, on obtient que $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée puisque $(\|f_n\|_H)$ est bornée. Soit $\|f_n\|_\infty \leq A$.

(b) Ensuite, en écrivant que, compte-tenu de 3., ($\|f\|_H = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|f'\|_{L^2(0\,,\,\pi)}$ pour $f \in E$) :

$$\|g_p - g_q\|_H = \|F \circ f_p - F \circ f_q\|_H = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|(F \circ f_p)' - (F \circ f_q)'\|_{L^2[0\,,\,\pi]} .$$

Or
$$\begin{aligned}\|(F \circ f_p)' - (F \circ f_q)'\|_{L^2} &= \|(F' \circ f_p) \,.\, f'_p - (F' \circ f_q) \,.\, f'_q\|_{L^2} \\ &\leq \| [(F' \circ f_p) - F' \circ f_q] \,.\, f'_p\|_{L^2} + \|(F' \circ f_q) \,.\, [f'_p - f'_q]\|_{L^2} \\ &\leq \|F' \circ f_p - F' \circ f_q\|_\infty \|f'_p\|_{L^2} + M_1 \|f'_p - f'_q\|_{L^2} \\ &\leq M_2 \|f_p - f_q\|_\infty \|f'_p\|_{L^2} + M_1 \|f'_p - f'_q\|_{L^2}\end{aligned}$$

(en utilisant la formule des accroissements finis)

d'où : $\|g_p - g_q\|_H \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} M_2 \|f_p - f_q\|_H \|f_p\|_H + M_1 \|f_p - f_q\|_H$.

(c) $\|g_p - g_q\|_H \leq \left(M_2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \|f_p\|_H + M_1 \right) \|f_p - f_q\|_H \leq \text{cte}\, \|f_p - f_q\|_H$

puisque $(\|f_p\|_H)$ est bornée. Et donc la suite $(g_p)_p$ est de Cauchy dans l'espace complet H donc converge dans H vers g. Et d'après l'inégalité $(*)$ (g_p) converge aussi vers g dans $L^\infty([0\,,\,\pi])$. Or $g_p = F \circ f_p$ et (f_p) de Cauchy dans H est aussi de Cauchy dans $L^\infty[0\,,\,\pi]$ par $(*)$, donc converge vers f dans $L^\infty([0,\pi])$ (et en fait $f \in H$ car $(f_p)_p$ converge vers f dans H). Par suite, $g_p \to F \circ f$ dans L^∞ . Il en résulte que $g = F \circ f \in H$.

(d) Si $f, g \in H$, alors $f + g$ et $f - g \in H$ et donc, avec $F(x) := x^2$, $(f+g)^2$ et $(f-g)^2 \in H$ d'où $f \,.\, g = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2] \in H$ et H est une algèbre.

Partie II

1. En appliquant la formule de Taylor en x_0, on obtient :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+h^2\varepsilon(x_0,h)$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+h^2\varepsilon(x_0,-h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\ \varepsilon(x_0,h)=0$.

Il en résulte que :

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)+[\varepsilon(x_0,h)+\varepsilon_0(x_0,-h)] \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f''(x_0).$$

2a. f étant continue, φ est aussi continue et vérifie $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.
Par ailleurs, la dérivée au sens de Schwarz étant linéaire, $\varphi^{('')}$ existe et est égale à :

$$\varphi^{('')}(x)=f^{('')}(x)+2\varepsilon=2\varepsilon>0.$$

Si φ admet un extremum positif strictement sur $[a,b]$, il est atteint par un point $x_0\in\,]a,b[$ puisque φ est continue sur $[a,b]$. Par ailleurs, pour $h>0$ assez petit, on aurait :

$$\varphi(x_0+h)\ \le\ \varphi(x_0) \quad,\quad \varphi(x_0-h)\le\varphi(x_0)$$

et donc, pour $h>0$ assez petit :

$$\frac{\varphi(x_0+h)+\varphi(x_0-h)-2\varphi(x_0)}{h^2}\ \le\ 0$$

et donc aussi $\varphi^{('')}(x_0)\le 0$, ce qui est absurde.

2b. Il résulte de 2a. que, pour tout $x\in[a,b]$, $\varphi(x)\le 0$, *i.e.* :

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (x-a)\ \le\ \varepsilon(x-a)(b-x) \quad,\quad \forall\varepsilon>0$$

i.e. $f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (x-a)\ \le\ 0 \quad,\quad \forall x\in[a,b]$ (faire tendre ε vers 0).

De même, en considérant la fonction $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (x-a)\ +\varepsilon(x-a)(b-x)$ sur $[a,b]$, on a : $\psi^{('')}(x)=-2\varepsilon<0$ et ne peut admettre de minimum strictement négatif sur $[a,b]$ et donc,

$$\forall x\in[a,b]\ ,\ \psi(x)\ge 0\ ,\ \textit{i.e.} :$$

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (x-a)\ \ge\ \varepsilon(a-x)(b-x) \quad,\quad \forall\varepsilon>0$$

i.e. $f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (x-a)\ \ge\ 0 \qquad ,\ \forall x\in[a,b]$.

Finalement, on a : $\forall x\in[a,b]$, $f(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (x-a)$ et f est affine.

3a. Puisque la série $[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, il résulte du I1. que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0 et donc sont bornées par $M\ge 0$.

Par suite, la série $\left[\dfrac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]_{n\ge 1}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \left|\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+\ b_n\sin nx)\right|\ \le\ \frac{2M}{n^2}\ .$$

Chaque fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{n^2}(a_n\cos nx+\ b_n\sin nx)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la somme

$$F(x)\ =\ -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+\ b_n\sin nx)$$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3b. Notons $S_0(x) = 0$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. On a :

$$\Delta(x\,,h) = \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^2 h^2}\ [a_n \cos(nx+nh) + b_n \sin(nx+nh) + a_n \cos(nx-nh) + b_n \sin(nx-nh)$$

$$-2a_n \cos nx - 2b_n \sin nx]$$

i.e.

$$\Delta(x\,,h) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 h^2}\ [2a_n \cos nx\,(\cos nh - 1) + 2b_n \sin nx\,.\,(\cos nh-1)]$$

$$\Delta(x\,,h) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ .\,2(\cos nh - 1)\ \frac{1}{n^2 h^2}$$

et $\quad \dfrac{2}{n^2 h^2}\ (\cos nh - 1) = -4\ \sin^2\left(\dfrac{nh}{2}\right) \dfrac{1}{n^2 h^2} = u(nh).$

2c. On peut écrire (transformation d'Abel) :

$$\Delta(x\,,h) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ u(nh) = \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n(x) - S_{n-1}(x))\ u(nh)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} S_n(x)\ u(nh) - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)\ u((n+1)h) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)\ [u(nh) - u((n+1)h)]$$

chacune des séries $[S_n(x)\ u(nh)]$ et $[S_n(x)\ u((n+1)h)]$ étant convergente (en $1/n^2$).
Par ailleurs, la série $[u(nh) - u(n+1)h)]$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [u(nh) - u((n+1)h)] = u(0) = 1 \quad (u(nh) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty)$$

et donc $\Delta(x\,,h) - f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [S_n(x) - f(x)]\ [u(nh) - u((n+1)h)]$.

2d. (i) Par hypothèse, on sait que $S_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
Par suite, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N = N(\varepsilon\,,x) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |S_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
Par ailleurs, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ fixé, $[u(nh) - u((n+1)h)]$ tend vers $u(0) - u(0) = 0$ quand h tend vers 0 puisque u est continue en 0 ($u(0) = 1$).
Et, d'autre part, en écrivant que $u(nh) - u((n+1)h) = \displaystyle\int_{nh}^{(n+1)h} u'(t)\,dt$ et en remarquant que

$$u'(t) = \frac{8}{t^2}\left[-\frac{1}{t}\ \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\ \sin\frac{t}{2}\,.\,\cos\frac{t}{2}\right]$$

et donc, pour $t \geq 1$, $|u'(t)| \leq \dfrac{16}{t^2}$, on obtient que :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u(nh) - u((n+1)h)| \leq \int_{Nh}^{+\infty} |u'(t)|\,dt \leq M = \int_0^{+\infty} |u'(t)|\,dt < +\infty$$

car u est C^1 au voisinage de 0 (même analytique).
Finalement, on a :

$$|\Delta(x\,,h) - f(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} |S_n(x)[u(nh) - u((n+1)h)]| + M\varepsilon$$

et si h tend vers 0, la somme \i\su($n = 0$,N,) tend aussi vers 0 et donc pour $|h| \leq h_0(\varepsilon)$, on a :

$$|\Delta(x\,,\,h) - f(x)| \leq \varepsilon(M+1)$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{h \to 0,\, h \neq 0} \Delta(x,h)$ existe et vaut $f(x)$.

Remarque : En fait, la preuve précédente est une variante du théorème d'Abel classique, dont voici une variante de la preuve à l'aide du théorème de convergence dominée.

Pour $(h\,,\,t) \in \mathbb{R}_+^2$, posons :

$$g(h\,,\,t) = \begin{cases} 0 & si\ h = 0 \\ S_n(x) - f(x) & \text{avec } n = E(t/h) \text{ pour } h \neq 0 \end{cases}$$

où $E(y)$ désigne la partie entière de y .

On a alors :

$$S_n(x) - f(x)[u(nh) - u((n+1)h)] = \int_{nh}^{(n+1)h} g(h\,,\,t)\; u'(t)\; dt\,.$$

Comme la suite $(S_n(x) - f(x))_n$ converge vers 0, elle est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (h\,,\,t) \in \mathbb{R}_+^2 \;\;,\;\; |g(h\,,\,t)| \leq M\,.$$

De plus, compte-tenu de l'expression de $u'(t)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |u'(t)|\; dt$ est convergente.

Enfin, l'application $h \longmapsto g(h\,,\,t)$ est continue en 0, puisque la suite $(S_n(x) - f(x))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi, on déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$h \longmapsto \int_0^{+\infty} g(h\,,\,t)\; u'(t)\; dt = \Delta(x\,,\,h) - f(x) \text{ est continue en 0,}$$

i.e. : $\lim\limits_{h \to 0} \;[\Delta(x\,,\,h) - f(x)] = 0\,.$

(ii) Considérons maintenant $G(x) := \int_0^x (x-t)\; f(t)\; dt$, pour $x \in \mathbb{R}$.

G a un sens car f est, par hypothèse, continue sur $\mathbb{R}$. De plus, G est dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\;,\;\; G'(x) = \int_0^x f(t)\; dt\,.$$

G' est donc C^1 et $G''(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Ainsi, la fonction $x \longmapsto (F - G)(x)$ est continue et admet une dérivée au sens de Schwarz nulle et, de II.2.b , est une fonction affine sur $\mathbb{R}$: il existe $\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\;,\;\; F(x) = \alpha x + \beta + \int_0^x (x - t)\; f(t)\, dt\,.$$

F est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $F'' = f$.

2e. La série définissant F étant uniformément (normalement) convergente sur $\mathbb{R}$, il en résulte que :

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\; cos\; nx\; dx = \frac{1}{n^2}\; a_n \qquad n \geq 1$$

et

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\; sin\; nx\; dx = \frac{1}{n^2}\; b_n \qquad n \geq 1.$$

F étant de classe C^2, en intégrant par parties, il vient :

$$\frac{1}{n^2}\quad a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\ \sin nx\,.F(x)\ \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\ \frac{\sin nx}{n}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\ \sin nx\,dx$$

et, puisque $F'(-\pi) = F'(\pi)$:

$$\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\ \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} F''(x)\ \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \cos nx\,dx$$

i.e. $\quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\ ,\ n \geq 1$.

De même, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ ,\ n \geq 1$.

Partie III

1. Soit $\tilde{f}$ le prolongement impair et 2π–périodique de f à $\mathbb{R}$.

Comme $f(0) = f(\pi) = 0$, $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in [0\,,+\infty[$. Il existe un entier $k \geq 0$ tel que $k\pi \leq x < (k+1)\pi$.
Posons $y = x - k\pi \in [0\,,\pi]$. On a $sin(nx) = (-1)^{nk}\, sin(ny)$.

- Si $k = 2p$ est pair, alors $sin(nx) = sin(ny)$ et donc la série $\sum_{1}^{+\infty} b_n\, sin(nx)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, sin(nx) = f(y) = f(x - 2p\pi) = \tilde{f}(x) \ .$$

- Si $k = 2p+1$ est impair, alors $sin(nx) = (-1)^n\, sin(ny) = -\, sin\; n(\pi - y)$ et donc la série $\sum_{1}^{+\infty} b_n\, sin(nx)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, sin(nx) = -f(\pi - y)$, $\pi - y \in [0\,,\pi]$

$$= -f((2p+2)\,\pi - x) = -\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x) \ .$$

De même pour $x \in \,]-\infty\,,0]$, la série $\sum_{1}^{+\infty} b_n\, sin(nx)$ converge et vaut $-\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x)$, d'où le résultat.

Les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ sont $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ cos(nx)\, dx = 0$ puisque $\tilde{f}$ est impaire et

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, sin(nx)\, dx \ \text{ pour } n \in \mathbb{N} .$$

Et d'après le §II, il résulte que $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ sin(nx)\, dx = b_n$,

i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, sin(nx)\, dx = b_n$.

2. On a :

$$J((1-t)u + tv) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [((1-t)u' + tv')^2 + ((1-t)u + tv)^2]\, dx - \int_0^{\pi} f[(1-t)u + tv]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left\{(1-t)^2 u'^2 + t^2 v'^2 + 2t(1-t)u'v' + (1-t)^2 u^2 + t^2 v^2 + 2t(1-t)uv\right\}\, dx$$

$$-(1-t)\int_0^{\pi} fu\, dx - t\int_0^{\pi} fv\, dx .$$

De même :

$$(1-t)\, J(u) + t\, J(v) = \frac{1-t}{2}\int_0^{\pi} (u'^2 + u^2)\, dx - (1-t)\int_0^{\pi} fu\, dx + \frac{t}{2}\int_0^{\pi} (v'^2 + v^2)\, dx - t\int_0^{\pi} fv\, dx$$

et donc :

$$J((1-t)u + tv) - (1-t)\, J(u) - t\, J(v) = \frac{1}{2}\,(1-t)\int_0^{\pi} ((1-t)-1)\, u'^2 + \frac{1}{2}\, t\int_0^{\pi} (t-1)\ v'^2$$

$$+ \frac{1}{2}\,(1-t)\int_0^{\pi} ((1-t)-1)\, u^2 + \frac{1}{2}\, t\int_0^{\pi} (t-1)\ v^2$$

$$+ \frac{2}{2}\ t(1-t)\int_0^{\pi} (u'v' + uv)$$

$$= -\frac{t(1-t)}{2}\int_0^{\pi} u'^2 + v'^2 + u^2 + v^2 - 2u'v' - 2uv$$

$$= -\frac{t(1-t)}{2}\int_0^{\pi} [(u'-v')^2 + (u-v)^2]\ dx .$$

3. Si u_1 et u_2 sont solutions du problème (P) alors en prenant $t = \frac{1}{2}$, $u = u_1$ et $v = u_2$, il vient :

$$J\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) + \frac{1}{8}\int_0^{\pi} [(u'_1 - u'_2)^2 + (u_1 - u_2)^2]\ dx = \frac{1}{2}(J(u_1) + J(u_2))$$

$$\leq \frac{1}{2}\ 2J\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) = J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)$$

car $\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in E_0$ et donc $\int_0^{\pi} [(u'_1 - u'_2)^2 + (u_1 - u_2)^2]\ dx = 0$.

Et, comme u_1 et u_2 sont continues sur $[0, \pi]$, $\int_0^{\pi} (u_1 - u_2)^2\, dx = 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$.

4a. Pour $u,v \in E_0$, on peut écrire : $J((1-t)u + tv) = J(u + t(v-u))$ et, en posant $w = v - u$, il vient de la question 2 :

$$J(u + tw) = J(u) + t\,J(w + u) - t\,J(u) - \frac{t(1-t)}{2}\int_0^{\pi} (w'^2 + w^2)\ dx$$

$$= J(u) + t\left\{J(u+w) - J(u) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (w'^2 + w^2)\, dx\right\} + \frac{t^2}{2}\int_0^{\pi} (w'^2 + w^2)\ dx$$

$$= J(u) + t\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [(u'+w')^2 + (u+w)^2 - u'^2 - u^2 - w'^2 - w^2] - \int_0^{\pi} fw\right\} + \frac{t^2}{2}\int_0^{\pi} (w'^2 + w^2)\ dx$$

$$= J(u) + t\left\{\int_0^{\pi} (u'w' + uw) - \int_0^{\pi} fw\right\} + \frac{t^2}{2}\int_0^{\pi} (w'^2 + w^2)\ dx .\ \ \underline{cqfd}$$

4b. On a : $u \in E_0$ est solution de (P) si et seulement si, pour tout $w \in E_0$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$J(u) \leq J(u + tw) = J(u) + \cdots$

i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall w \in E_0\}$ $\quad 0 \leq t\left\{\int_0^{\pi} (u'w' + uw) - \int_0^{\pi} fw\right\} + \frac{t^2}{2}\int_0^{\pi} (w'^2 + w^2)\ dx$

ce qui implique pour $t > 0$, $\forall w \in E_0$, $0 \leq \int_0^{\pi} [(u'\,w' + uw) - fw]\, dx + \frac{t}{2}\int_0^{\pi} (w'^2 + w^2)\ dx$, et en faisant tendre t vers 0 : $0 \leq \int_0^{\pi} [u'\,w' + uw - fw]\, dx$, $\forall w \in E_0$.

En changeant w en $-w$, cela implique que $\forall w \in E_0$: $\int_0^{\pi} (u'\,w' + uw) = \int_0^{\pi} fw \quad (P')$.

Réciproquement, si cette condition est réalisée, il résulte du calcul précédent que :

$$J(u + tw) = J(u) + \frac{t^2}{2}\int_0^{\pi} (w'^2 + w^2)\ dx \geq J(u)\ ,\quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall w \in E_0 .$$

5a. Soit $u \in E_0$ une solution de (P).

En prenant $v = \sin nx$, qui appartient à E_0, dans (P'), il vient, pour tout entier $n \geq 1$:

$$n\int_0^{\pi} u' \cos nx\, dx + \int_0^{\pi} u \sin nx\, dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

et, en intégrant par parties : $\int_0^\pi u' \cos nx \, dx = u \cos nx \Big|_0^\pi + n \int_0^\pi u \sin nx \, dx$

d'où la relation : $(n^2 + 1) \int_0^\pi u(x) \sin(nx) \, dx = \frac{\pi}{2} b_n$

i.e. $u_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi u(x) \sin(nx) \, dx = \frac{b_n}{n^2 + 1}$.

5b. $\tilde{u}(x)$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ car la série $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2+1} \sin nx$ est normalement convergente puisque $(b_n)_n$ est une suite de coefficients de Fourier, donc est bornée.

Par ailleurs, la fonction $w(x)$ définie par $w(x) = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2(n^2+1)} \sin(nx)$ est de classe C^2 (on peut dériver deux fois terme à terme, les séries obtenues convergent normalement sur $\mathbb{R}$) et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ w''(x) = -\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2+1} \sin nx = -\tilde{u}(x)$$

et donc, puisque d'après le §II, la série $v(x) := \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2} \sin nx$ définit une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$v''(x) = \tilde{f}(x) \ .$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ -\tilde{u}''(x) + \tilde{u}(x) = \tilde{f}(x)$.

Par ailleurs, on a bien $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(\pi) = 0$.

5c. Il est clair que $u = \tilde{u}\big|_{[0\,,\,\pi]}$, d'après la question précédente, vérifie :

$$(D) \quad \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} .$$

5d. Montrons que u est solution de (P') : d'après (D), pour toute fonction $v \in E_0$, il vient :

$$-\int_0^\pi u'' v + \int_0^\pi uv = \int_0^\pi fv$$

et, en intégrant par parties,

$$-\int_0^\pi u'' v \, dx = -\left[u'v \Big|_0^\pi - \int_0^\pi u'v' \, dx \right] = \int_0^\pi u'v' \, dx$$

et donc, pour tout $v \in E_0$, $\int_0^\pi u'v' + uv = \int_0^\pi fv \, dx$, *i.e.* : (P') .

Et d'après 4b. , u est solution de (P).

| ——————— |

4.2.3 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite

Partie I.A

Cette première partie demandait deux démonstrations du résultat suivant, utilisé dans la suite du problème en (II.3.a) :

Si la suite des $f_n(x)$ *, où la fonction* f_n *est définie par* $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *, tend vers* 0 *simplement sur* R *, chacune des suites de nombres réels* (a_n) *et* (b_n) *tend vers* 0 *, et la suite des fonctions* f_n *tend donc vers* 0 *uniformément sur* R *.*

D'abord, en donnant à x la valeur 0, on voit que la suite (a_n) tend vers 0, puis que la suite $(a_n \sin nx)$ tend vers 0 pour tout nombre réel x.

La première méthode procède par l'absurde en supposant que la suite (a_n) ne tend pas vers 0. Les candidats ont généralement bien écrit cette négation. Cependant, certains candidats ont écrit que « si la suite (a_n) ne tend pas vers 0, c'est que sa limite est $\neq 0$ ».

Il est à remarquer que, tout au long de l'épreuve, bon nombre de candidats utilisent la notation $\lim\,(a_n)$ avant d'avoir prouvé que la suite (a_n) a une limite. Rappelons que cette notation peut être utile pour désigner la limite d'une suite dont on a prouvé ou admis l'existence. L'utilisation de cette notation pour prouver l'existence de la limite est une pétition de principe, et peut conduire facilement à des résultats grossièrement faux (*cf.* Rapport du concours interne d'agrégation, session 1994, p.32).

Il s'agit ensuite de construire une suite (J_k) d'intervalles fermés emboités sur lesquels on a l'inégalité $|\sin n_k x| \geqslant 1/2$, en utilisant la condition $n_{k+1} \geqslant 3\,n_k$. L'emboitement des intervalles revenait à la recherche d'un entier p_k situé dans un intervalle de longueur > 1, ce qui est toujours possible. Très peu de candidats ont mené à bien cette recherche. Un certain nombre d'entre eux ont fait une faute de logique en confondant condition nécessaire et condition suffisante par un raisonnement du type suivant. La relation

$$\frac{1}{n_k} + 6\,\frac{p_k}{n_k} \;\leqslant\; \frac{1}{n_{k+1}} + 6\,\frac{p_{k+1}}{n_{k+1}} \tag{1}$$

et la condition $n_{k+1} \geqslant 3\,n_k$ entraînent la relation

$$3\,(1 + 6\,p_k) \;\leqslant\; 1 + 6\,p_{k+1}. \tag{2}$$

La relation (2) est satisfaite si l'on prend $p_{k+1} = 3\,p_k + 1$. L'erreur est de penser que la relation (1) est alors satisfaite.

Une forme plus subtile de confusion entre condition nécessaire et condition suffisante apparait aussi dans la forme de la rédaction de certaines copies, sans donner lieu à une erreur mathématique. Il s'agit de négligences de rédaction comme, par exemple :« Pour que $\mathrm{J}_{k+1} \subset \mathrm{J}_k$, il faut que l'on ait ... », alors que l'on cherche une condition suffisante. Ou encore : « Si $(b_n) \to 0$, on a $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N} > 0$ tel que $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}$, $|b_n| \leqslant \varepsilon$, donc, si (b_n) ne tend pas vers 0, $\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \mathrm{N} > 0, \exists n \geqslant \mathrm{N}$ tel que $|b_n| \geqslant \varepsilon$ ».

Pour démontrer que l'intersection de la suite des intervalles J_k n'est pas vide, plusieurs arguments pouvaient être donnés : les extrémités des intervalles forment des suites adjacentes, ou bien l'intersection d'une famille décroissante d'espaces compacts non vides n'est pas vide, ou encore il s'agit d'une suite décroissante de parties fermées non vides dont les diamètres tendent vers 0 dans un espace métrique complet.

La seconde méthode utilise les intégrales $\int_0^{2\pi} (b_n \sin nx)^2 \, \mathrm{d}\,x$ dont la valeur est $\pi\, {b_n}^2$. Si la suite (b_n) est bornée, le théorème de convergence dominée s'applique, et on en déduit que la suite (b_n) tend vers 0. Il était exclu d'utiliser un théorème de convergence uniforme car la convergence uniforme de la suite des fonctions $b_n \sin nx$ vers 0 est précisément ce qu'on veut démontrer.

Partie I.B

La majoration de la question (1.a), utilisée pour démontrer la convergence absolue de la série de terme général $(\alpha_n/n) \sin nx$, permet aussi de démontrer que cette série converge uniformément sur R, et, par suite, que sa somme est une fonction continue, en application du théorème sur les limites uniformes de fonctions continues. Ce raisonnement était exigé dans la question (1.b).

L'application θ est linéaire. Pour démontrer qu'elle est injective, il suffit de démontrer que, si la fonction $\theta(\alpha)$ est identiquement nulle, la suite α est la suite nulle. La convergence uniforme, ou normale, démontrée ci-dessus, permet de démontrer, en intégrant terme à terme, que l'on a

$$\int_0^{\pi} (\sin kx)\, \theta(\alpha)(x) \; \mathrm{d}\,x = \pi\alpha_k/2\pi$$

égalité d'où résulte l'injectivité de l'application linéaire θ. Très peu de candidats ont traité correctement cette question.

L'application θ est un isomorphisme de l'epace vectoriel ℓ^2_{R} sur l'espace vectoriel H. Si l'on transporte à H la norme de ℓ^2_{R}, les espaces vectoriels normés H et ℓ^2_{R} sont isomorphes (isométriques) ; comme l'espace normé ℓ^2_{R} est complet, il en est de même de l'espace vectoriel normé H. Presque aucun candidat n'a donné cette démonstration. Mais un certain nombre de candidats ont bien démontré que l'espace H est complet, ceci en prenant une suite de Cauchy (f_n) dans H, et en démontrant qu'elle possède une limite dans H. On relève la suite (f_n) en une suite (α_n) dans ℓ^2_{R} telle que $\theta(\alpha_n) = f_n$. La conservation de la norme fait de (α_n) une suite de Cauchy qui a une limite α dans l'espace complet ℓ^2_{R}. L'application θ est continue (toujours la conservation de la norme), donc la suite $(\theta(\alpha_n))$ tend vers $\theta(\alpha)$, autrement dit, la suite (f_n) a une limite dans H. Ce raisonnement, lorsqu'il était complet, a été accepté comme solution de la question.

La question (2) demandait l'application du théorème de convergence de Dirichlet pour les fonctions périodiques, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et vraiment continues. Il fallait donc d'une part en vérifier les hypothèses (ce que peu de candidats ont fait avec rigueur) et d'autre part citer le théorème que l'on appliquait. Les phrases comme « La fonction est développable en série de Fourier » ou « On peut donc développer la fonction en série de Fourier » ne peuvent remplacer la citation d'un théorème et la vérification de ses hypothèses. Que signifie en effet « développable » en série de Fourier :

- que l'on peut calculer les coefficients de Fourier ? c'est possible pour toute fonction intégrable,

- que la série de Fourier est convergente dans ℓ^2_{R} ? c'est vrai pour toute fonction continue par morceaux,

- que la série de Fourier est simplement convergente ? qu'elle est uniformément convergente ? et que dire de sa somme ?

La question (3) ne présentait pas de difficulté sérieuse si l'on connaissait la définition d'un produit scalaire : forme bilinéaire symétrique, positive, non singulière, et si l'on connaissait le théorème de Parseval. La densité de E dans H a été traitée par très peu de candidats, alors que c'était une simple constatation : une fonction g de H est limite, au sens de la norme de H, des sommes partielles de la série qui la définit.

La question (4) a été diversement traitée. Presque tous les candidats ont bien identifié la fonction h_a, et le plus souvent dessiné son graphe, ce qui est une bonne idée. La plupart ont pensé à écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f|h_a)$. Mais très peu de candidats ont fait le parcours complet : calcul de $\|h_a\|$, minimum de la fonction $\pi/a(\pi-a)$, et enfin égalité pour $a=\pi/2$.

A ce propos, rappelons l'orthographe du patronyme du mathématicien berlinois Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).

Dans la question (4), la partie $a)$ a été souvent bien traitée. La partie $b)$ nécessitait une maîtrise certaine, même si l'inégalité cherchée était donnée dans l'énoncé ; très peu de candidats ont eu une démarche correcte dans cette question (voir solution).

Partie II

Cette partie a été abordée par de nombreux candidats. La première question ne présente pas de difficulté pour les candidats qui connaissent la formule de Taylor. Cependant, un bon tiers des candidats s'est lancé dans des calculs utilisant le symbole « lim », et n'a pas abouti.

Dans la deuxième question, beaucoup de candidats ont abouti dans le calcul de $\varphi^{('')}$, le plus souvent maladroitement, sans appliquer la question (1) à la fonction $(x-a)(b-x)$. Mais très peu de candidats ont su démontrer, en revenant à la définition, qu'en un maximum local x de la fonction φ, on a nécessairement $\varphi^{('')}(x)\leqslant 0$.

Dans la troisième question, on demande de démontrer que la série définissant $\mathrm{F}(x)$ est convergente et que sa somme est continue. On est en situation d'utiliser le théorème sur les limites uniformes de fonctions continues (ou sur les séries uniformément convergentes de fonctions continues). Cela utilise le résultat de la partie $(\mathrm{I.A})$, ce qui n'a pas toujours été vu.

La question $(3.b)$ a été en général bien traitée. Les calculs de la question $(3.c)$ ont été bien conduits, mais rarement justifiés. La suite de la question a été peu traitée, et rarement correctement.

Partie III

A quelques exceptions près, les candidats qui ont abordé cette partie se sont contentés d'effectuer les calculs des questions (2) et $(4.a)$.

La question (1), pourtant peu difficile, n'a pas été comprise par la plupart des candidats qui l'ont abordée. Ils ont cru qu'il s'agissait de prolonger la fonction f comme dans la question (I.B.2). Ils ont rarement vu que la relation donnant b_n résultait de la question (II.3).

Pour les autres questions, on se reportera à la solution type. Signalons cependant que la question $(5.b)$ utilise à nouveau la question (II.3).

Épreuves orales

5 Rapport sur les épreuves orales

5.1 Considérations générales

Le jury est cette année encore relativement satisfait de la prestation orale des candidats. Cette satisfaction s'est à nouveau traduite par un relèvement de la barre d'admission.

La réflexion sur l'évolution des épreuves orales, vers des épreuves plus synthétiques, s'est poursuivie. On trouvera ci-dessous des titres de leçons susceptibles d'être proposées au concours 2006, suivie par la liste des leçons proposées cette année.

L'introduction des leçons de synthèse entraînera bien entendu la suppression d'un certain nombre des leçons plus spécialisées qui sont actuellement proposées.

5.1.1 Liste indicative de leçons « synthétiques »

Algèbre et géométrie

- Utilisation de transformations en géométrie, au collège et au lycée.
- Groupes et géométrie.
- Division euclidienne.
- Polynômes et fonctions polynomiales.
- Rang en algèbre linéaire.
- Fractions et nombres rationnels.
- Formes réduites d'endomorphismes. Applications.
- Factorisation de matrices. Cas des matrices symétriques.
- Équations linéaires et géométrie.
- Diverses notions d'angle.
- Applications géométriques des nombres complexes.
- Géométrie du triangle.
- Trigonométrie.
- Résolution de problèmes à l'aide de graphes.
- Coniques.
- Courbes planes paramétrées.

Analyse et probabilités

- Suites de nombres réels.
- Approximation d'un nombre réel. Théorèmes et méthodes.
- Continuité des fonctions.
- Propriétés de connexité.
- Suites de fonctions. Divers modes de convergence.
- Le nombre π.
- Trigonométrie.
- Propriétés de la limite d'une suite de fonctions d'une variable réelle.
- Utilisations de la dérivée d'une fonction numérique.
- Fonctions définies sur un intervalle, à valeurs dans R ou R^n. Dérivabilité, théorème des accroissements finis, exemples.
- Fonctions réciproques.
- Exponentielles et logarithmes

– Intégrales et primitives.
– Équations et systèmes différentiels (sous réserve d'une modification du programme).
– Recherche d'extremums.
– Probabilité conditionnelle et indépendance. Exemples.
– Lois des grands nombres.
– Exemples de tests en statistique (sous réserve d'une modification du programme).

5.1.2 Leçons et exercices proposés en 2004

LEÇONS D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

101. Parties génératrices d'un groupe (les généralités sur les groupes seront supposées connues). Exemples.
102. Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
103. Exemples de groupes finis. Applications.
104. Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
105. Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
106. Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
107. Propriétés élémentaires liées à la notion de nombre premier.
108. PGCD, PPCM dans $\mathbf{Z}$, théorème de Bézout. Applications.
109. PGCD dans $K[X]$, où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.
110. Base de numération d'entiers. Applications.
111. Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.
112. Polynômes irréductibles à une indéterminée sur un corps commutatif. Factorisation. Cas des corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
113. Racines d'un polynôme à une indéterminée sur un corps commutatif, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Applications.
114. Racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$.
115. Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une application linéaire.
116. Sommes et sommes directes de sous–espaces vectoriels d'un espace vectoriel. Applications.
117. Rang en algèbre linéaire (on se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie).
118. Formes linéaires, hyperplans, dualité (on se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie).
119. Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, polynômes d'endomorphisme.
120. Changements de bases en algèbre linéaire (applications linéaires, formes bilinéaires. . .). Applications.
121. Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.
122. Déterminants. Applications.
123. Trigonalisation des endomorphismes, sous–espaces caractéristiques. Applications.
124. Endomorphismes diagonalisables.

125. Groupe des homothéties-translations dans le plan. Applications.
126. Espaces vectoriels euclidiens (dimension finie). Groupe orthogonal.
127. Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3.
128. Formes quadratiques sur un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie. Classification dans chacun des deux cas.
129. Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Applications.
130. Endomorphismes hermitiens en dimension finie.
131. Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien (dimension finie) et applications géométriques (les généralités sur les formes quadratiques seront supposées connues).
132. Applications géométriques des nombres complexes.
133. Similitudes planes directes, indirectes ; formes réduites.
134. Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.
135. Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.
136. Géométrie du triangle. Relations métriques et trigonométriques.
137. Barycentres. Applications.
138. Orientation d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3, produit mixte, produit vectoriel, applications.
139. Droites et plans dans l'espace.
140. Projecteurs et symétries dans un espace affine de dimension finie.
141. Polygones réguliers dans le plan.
142. La parabole dans le plan affine euclidien.
143. L'ellipse dans le plan affine euclidien.
144. L'hyperbole dans le plan affine euclidien.
145. Coniques dans le plan affine euclidien.
146. Cercles dans le plan affine euclidien.
147. Étude locale des courbes planes paramétrées.
148. Propriétés métriques locales des courbes de l'espace, en dimension 3.
149. Propriétés métriques locales des courbes planes.
150. Mouvements à accélération centrale.
151. Cinématique du point : vitesse, accélération. Exemples de mouvements.

EXERCICES D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

301. Exercices sur les groupes finis.
302. Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans **Z**.
303. Exercices faisant intervenir la division euclidienne.
304. Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
305. Exercices faisant intervenir les nombres premiers.
306. Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.
307. Exercices faisant intervenir des dénombrements.
308. Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.
309. Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur **R** ou **C**.
310. Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
311. Exercices faisant intervenir la notion de rang.
312. Exercices sur les matrices carrées inversibles.
313. Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.
314. Exercices faisant intervenir des déterminants.
315. Exemples de recherche et d'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.
316. Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.
317. Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.
318. Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.
319. Exemples de méthodes et d'algorithmes de calcul en algèbre linéaire.
320. Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.
321. Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.
322. Exercices sur les formes quadratiques.
323. Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
324. Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes ou indirectes.
325. Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.
326. Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.
327. Exercices faisant intervenir des applications affines.
328. Exemples de propriétés affines et de propriétés métriques en dimension 2 et en dimension 3.
329. Exercices sur les aires et les volumes de figures simples.
330. Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimension 2 et en dimension 3.
331. Exercices sur la cocyclicité.
332. Exercices sur les cercles.
333. Exercices de géométrie plane faisant intervenir la notion d'angle.
334. Exercices de géométrie plane faisant intervenir des triangles isométriques ou semblables.
335. Exercices sur les coniques.

336. Exemples d'étude de courbes planes.
337. Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
338. Exercices sur les propriétés métriques des courbes de l'espace.
339. Exemples d'intervention de transformations planes pour l'étude de configurations et de lieux géométriques.
340. Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
341. Exemples de groupes en géométrie.
342. Exercices de géométrie en dimension 3.
343. Exercices de construction en géométrie plane.
344. Exemples de choix de repères pour la résolution d'exercices de géométrie en dimension 2 et en dimension 3.
345. Exercices de cinématique du point.
346. Exemples d'étude de problèmes de mécanique du point.
347. Exercices sur les triangles.

LEÇONS D'ANALYSE

201. Suites de nombres réels.
202. Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence.
203. Approximations d'un nombre réel par des suites. Rapidité de convergence.
204. Approximations d'un nombre irrationnel par des nombres rationnels.
205. Approximations d'une solution d'une équation numérique.
206. Séries à termes réels positifs.
207. Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi–convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).
208. Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.
209. Applications linéaires continues. Norme d'une telle application.
210. Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.
211. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples.
212. Parties connexes de $\mathbf{R}$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples.
213. Parties connexes par arcs de $\mathbf{R}^n$; exemples et applications.
214. Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace vectoriel normé complet ; applications.
215. Suites de fonctions : divers modes de convergence. Exemples.
216. Séries de fonctions : convergence uniforme, convergence normale (les résultats relatifs aux suites de fonctions sont supposés connus). Propriétés de la somme, exemples.
217. Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
218. Développement d'une fonction en série entière ; exemples et applications.
219. Développement d'une fonction en série de Fourier ; exemples et applications.
220. Définition de l'exponentielle complexe et des fonctions trigonométriques, nombre π.
221. Séries de Fourier. Divers modes de convergence. Exemples.
222. Propriétés de la limite d'une suite de fonctions d'une variable réelle (les divers modes de convergence étant supposés connus).
223. Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathsf{N}^* \cup \{\infty\}$. Applications.
224. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
225. Théorème de Rolle. Applications
226. Continuité, continuité uniforme de fonctions numériques définies sur un intervalle. Applications.
227. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
228. Fonctions définies sur un intervalle à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$: dérivabilité, accroissements finis. Exemples.
229. Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle et applications.
230. Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle : cas d'une fonction continue, cas d'une fonction dérivable. Exemples.
231. Calcul de valeurs approchées d'une intégrale. Exemples d'estimation de l'erreur.

232. Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$.

233. Intégrale d'une fonction numérique continue sur un intervalle compact. Propriétés.

234. Intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

235. Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$.

236. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ; écriture matricielle ; exponentielle d'une matrice.

237. Systèmes différentiels linéaires $Y' = AY$ à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.

238. Équations différentielles linéaires à coefficients constants. Exemples.

239. Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentielle. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Fonctions composées.

240. Fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. Inégalités des accroissements finis. Applications

241. Formule de Taylor–Young pour les fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$. Applications à la recherche d'extremums.

242. Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli, variable aléatoire de loi binomiale.

243. Probabilité conditionnelle et indépendance. Exemples.

244. Espérance, variance, covariance, loi faible des grands nombres.

245. Lois usuelles de variables aléatoires possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné, loi exponentielle, loi normale.

EXERCICES D'ANALYSE

401. Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.
402. Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
403. Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
404. Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
405. Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
406. Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.
407. Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
408. Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
409. Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.
410. Comparaison sur des exemples de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.
411. Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
412. Exemples de développements en série entière. Applications.
413. Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.
414. Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
415. Exemples d'applications du théorème des accroissements finis pour une fonction numérique d'une variable réelle.
416. Exemples d'encadrements de fonctions numériques ; utilisations.
417. Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.
418. Exemples d'utilisation de développements limités.
419. Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.
420. Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.
421. Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
422. Exemples d'étude d'intégrales impropres.
423. Exemples d'intégration sur un intervalle.
424. Exemples de calculs d'aires et de volumes.
425. Exemples de calculs d'intégrales multiples.
426. Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
427. Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires.
428. Exemples de résolution de systèmes différentiels linéaires.
429. Exemples d'équations différentielles simples issues des sciences expérimentales ou de l'économie.
430. Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.
431. Exemples d'approximations d'un nombre réel.
432. Approximations du nombre π.
433. Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.

434. Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.

435. Exemples de modélisation probabiliste.

436. Exemples de variables aléatoires et applications.

437. Exemples de problèmes de dénombrement.

438. Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.

439. Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

5.2 La première epreuve orale

Cette épreuve comprend trois parties : le plan, le développement puis les questions du jury. Chacune dure un quart d'heure. Avant de faire des commentaires spécifiques à chacune des phases de l'épreuve, commençons par des remarques d'ordre général.

L'oral doit notamment révéler les qualités de synthèse et l'esprit critique du candidat. Il est donc préférable d'une part d'éviter de construire son exposé en rassemblant des morceaux pris dans un trop grand nombre d'ouvrages ; d'autre part, suivre sans recul une preuve ou la solution d'un exercice « aveugle » certains candidats qui ne peuvent ensuite expliquer la démarche entreprise : ce qui apparaît pour certains comme une astuce a souvent une origine naturelle. Il peut également être opportun de simplifier ou d'épurer certaines démonstrations, par exemple en ayant recours à d'autres outils du programme.

Pendant le temps de préparation (trois heures) de l'épreuve, le candidat doit lire attentivement le sujet : il est indispensable de bien le cerner. Par exemple, dans la leçon « développements en série entière. Exemples, applications », s'attarder sur les propriétés élémentaires des séries entières peut conduire à un hors-sujet.

Le choix du candidat sur l'un des deux sujets proposés ne doit pas être guidé seulement par l'apparente facilité de l'un par rapport à l'autre. D'une part, le jury sait distinguer un sujet délicat. D'autre part, si le sujet est classique, on attend bien sûr du candidat une plus grande maîtrise.

Bien que ce concours s'adresse à des personnes ayant déjà une expérience de l'enseignement, certains candidats ont du mal à gérer leur tableau. Même si l'émotion, compréhensible étant données les circonstances, en est en partie responsable, il est important lors de cette épreuve de montrer ses capacités à exposer clairement un cours.

Enfin, signalons que plusieurs candidats se sont autorisés à solliciter l'indulgence du jury en faisant valoir le nombre de fois où ils ont été admissibles. Une telle attitude ne saurait être acceptée par le jury, qui, soucieux de l'équité du concours, ne peut tenir compte que de la prestation des candidats lors de l'épreuve.

Le plan.

Rappelons le principe : en quinze minutes, il s'agit de faire un exposé structuré sur le sujet choisi : définitions, énoncés clairs et précis, exemples... Cela doit ressembler à un cours magistral dans lequel on ne présente toutefois aucune démonstration. On ne peut donc, comme le font certains, le réduire en un synopsis. Il doit être conforme au programme de l'agrégation (et l'on ne peut donc pas, le plus souvent, se contenter d'un exposé de niveau lycée). En ce qui concerne les prérequis (facultatifs), il faut en modérer la longueur : on doit au plus signaler quelques points importants admis. Signalons que les exemples et contre-exemples apparaissent trop rarement, or ce sont des instruments pédagogiques essentiels qui permettent aussi de motiver d'autres résultats ou d'expliquer la teneur des hypothèses, la restriction d'une conclusion.

Le candidat peut s'appuyer sur ses notes personnelles mais il faut bien sûr éviter que cela se réduise à une simple séance de recopiage. Ainsi, relire ses notes pour pouvoir réécrire mot à mot une définition ou l'énoncé d'un théorème, est une attitude à proscrire.

Nous conseillons aux candidats de ne pas utiliser trop de livres de la bibliothèque de l'agrégation qu'ils découvrent au dernier moment : ils risquent de perdre du temps à y chercher les éléments du cours nécessaires et d'altérer la cohérence du plan en mettant bout à bout des morceaux issus de différents ouvrages. C'est pourquoi, les préparationnaires devraient être familiers d'un cours de mathématiques couvrant l'essentiel du programme ; ils pourraient ensuite éventuellement enrichir leur plan avec quelques résultats issus d'autres livres. La connaissance préalable de certains ouvrages présente un autre avantage : éviter de se perdre dans un livre de niveau trop élevé le jour de l'épreuve.

Il est plus que souhaitable (notamment pour un sujet de géométrie) d'inclure des dessins. Ainsi par exemple, voit-on des leçons sur les coniques où aucune figure n'apparaît !

Rappelons que dans l'énoncé d'une définition, il est incorrect d'employer « si et seulement si ».

Enfin, nous encourageons les candidats à exhiber des passerelles entre le sujet traité et d'autres notions. Les mathématiques ne sont pas compartimentées mais forment un tout.

Le développement.

Le candidat propose au jury de développer un point du plan (sans ses notes personnelles !) : la démonstration d'un théorème, un exemple, etc... Le candidat a le choix de ce point mais il doit être cohérent avec le niveau de l'exposé. De façon générale, le développement doit être consistant. Le choix d'un point trivial est sanctionné d'une façon ou d'une autre.

Pendant cette phase, le candidat doit savoir mettre en valeur ses qualités pédagogiques :

- commencer par expliquer les idées importantes de l'hypothèse à la conclusion avant de rentrer dans les détails techniques. C'est d'ailleurs comme cela que les élèves comprendront donc mémoriseront la preuve.
- un dessin (notamment en géométrie et en analyse) est souvent un très bon support à la compréhension du raisonnement.
- passer sur les points clairement faciles et insister sur les passages difficiles.

Nous conseillons aux candidats de préparer soigneusement cette partie. Trop souvent, ils se perdent dans un développement qu'ils ont pourtant eux-mêmes choisi.

En ce qui concerne les développements sur les sujets de géométrie, les candidats ont régulièrement tendance à s'enfermer dans des calculs analytiques (d'ailleurs parfois inutilement compliqués) qui masquent la situation géométrique.

Les questions du jury.

Le candidat doit avoir conscience que par ses questions le jury ne cherche qu'à

- corriger une erreur commise dans le plan ou une démonstration.
- rectifier une lacune, une incohérence logique, une imprécision dans un énoncé.
- développer un point dont la présentation lui a paru trop succincte.
- donner au candidat l'occasion de montrer ses connaissances et ses qualités d'enseignant.

Ainsi, le candidat ne doit pas se laisser démonter par des questions dont le seul but est de lui permettre de se valoriser.

5.3 La seconde épreuve orale

Déroulement de l'épreuve

Cette épreuve, comme la précédente, dure 45 minutes environ et est précédée de trois heures de préparation.

À son arrivée, le candidat tire au hasard une enveloppe comportant deux thèmes. Le candidat choisit un thème parmi les deux qu'il a tirés et sélectionne des exercices l'illustrant. Il dispose pour cela de trois heures pendant lesquelles il peut librement s'aider des documents de la bibliothèque de l'Agrégation Interne, ainsi que de tout ouvrage qu'il aura lui-même apporté, à l'exclusion de quelques ouvrages interdits.

À l'issu de cette prépartion, le candidat doit fournir un document comportant son choix motivé de trois à six exercices. Ce document est photocopié ; en se présentant devant le jury, le candidat lui remet ces photocopies.

L'épreuve se déroule alors en trois temps :

1. Exposé motivé des exercices sélectionnés par le candidat et illustrant le thème choisi.
2. Résolution commentée d'un des exercices au choix du candidat parmi ceux qu'il vient d'exposer.
3. Questions du jury.

Voici quelques remarques inspirées au jury par le concours 2004.

Le choix des exercices

Il est important que le candidat propose :

- *Des exercices entrant bien dans le thème choisi.* Un hors-sujet est toujours sanctionné.
- *Des exercices illustrant une méthode.* Il faut éviter des exercices à astuce, ou anecdotiques. Il faut aussi éviter des exercices qui sont en fait des questions de cours.
- *Des exercices de difficulté et technicité bien choisies.* Le jury valorise un choix d'exercices plus difficiles. Attention cependant : le candidat doit maîtriser et savoir résoudre tous les exercices proposés. Par ailleurs, si le jury apprécie les candidats qui se montrent à l'aise dans des exercices techniques, il vaut mieux éviter les exercices donnant lieu à une succession de calculs fastidieux masquant souvent la véritable nature du problème.
- *Des exercices offrant une application substantielle.* Un exercice trouvant son origine ou sa formulation dans d'autres thèmes de mathématiques voire d'autres sciences est toujours apprécié. Pour plusieurs thèmes, cela devient une obligation : un bon choix d'exercices portant sur des systèmes d'équations différentielles doit contenir des énoncés issus par exemple de la mécanique ou de l'électricité.
- *Des exercices variés.* En règle générale, les candidats doivent proposer des exercices illustrant plusieurs aspects du thème. Même si, en la matière, toute prétention à l'exhaustivité est inenvisageable, la variété des exercices choisis est un élément important dans l'appréciation de la prestation du candidat.

– Le candidat pourra choisir des exercices qui posent des questions différentes à l'intérieur du thème. Sur un thème portant sur les intégrales «impropres», le candidat pourra proposer des exercices portant principalement sur la convergence absolue, d'autres sur la semi-convergence et d'autres sur le calcul d'une telle intégrale.

– Il pourra choisir des exercices proposant plusieurs méthodes. Par exemple, il pourra donner des calculs de rang par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, par un calcul de noyau ou par une méthode de bordants.

– Il pourra choisir des exercices se situant à des niveaux variés. Certaines notions de géométrie (angles, triangles, distances, cercles...) se retrouvent tout au long de l'enseignement et prennent des éclairages différents suivant le niveau où ils sont enseignés.

L'exposé motivé des exercices

Cette partie ne doit pas dépasser un quart d'heure. La parole est laissée au candidat qui doit expliquer son choix d'exercices, indiquer les concepts et méthodes utilisés.

La proportion des candidats qui arrivent à exposer convenablement des motivations consistantes est croissante, mais reste faible. Beaucoup ne font que reprendre oralement en les paraphrasant l'énoncé de leurs exercices.

Cette partie reste difficile pour la plupart d'entre eux. Souvent très courte, elle ne permet pas toujours de repérer quel aspect plus particulier du cours le candidat a voulu illustrer par chaque exercice choisi. S'il n'est pas demandé de refaire un cours complet sur le sujet proposé, il est possible d'en rappeler brièvement les résultats essentiels en signalant quels exercices les illustrent le mieux.

Le jury, conscient de la difficulté, ne tient pas trop rigueur aux candidats donnant une présentation trop rapide. Cependant, il valorise les candidats qui arrivent, dans la limite du temps imparti, à bien expliquer les principaux résultats, les diverses méthodes,. . .que leur choix d'exercices illustre.

La résolution commentée d'un exercice

Le candidat choisit un exercice parmi ceux qu'il a proposés et le résout. Cette partie dure un quart d'heure. Cependant, lorsque le jury intervient, il peut arriver que cette durée soit légèrement prolongée.

Le candidat doit dominer complètement cette partie de l'épreuve, et mener les calculs en s'affranchissant de ses notes. Dans certains exercices, le candidat peut choisir de passer rapidement sur certaines étapes du calcul afin d'arriver aux points les plus importants de sa démonstration. Il peut aussi dans certains cas un peu techniques vérifier rapidement un calcul ou une étape à l'aide de ses notes : plutôt que d'apprendre par cœur la démonstration de l'exercice choisi, il est important d'y repérer les principales articulations du raisonnement et la manière dont les résultats du cours interviennent.

Le jury peut intervenir à tout moment afin de faire préciser un aspect de la résolution, faire énoncer complètement les théorèmes utilisés et s'assurer que les hypothèses sont correctement vérifiées.

Le jury valorise les candidats qui savent garder un certain recul au cours de leur démonstration, expliquent l'enchaînement des diverses idées qui interviennent, justifient l'emploi de tel résultat ou telle méthode, voire comparent diverses méthodes de résolution. L'utilisation des figures et diagrammes explicatifs est très fortement conseillée.

Les questions du jury

Cette phase éclaircit ou prolonge les deux premières. Les questions peuvent porter sur la motivation, la résolution proposée. Le jury peut aussi demander la résolution d'un autre exercice présenté par le candidat, ou poser des questions plus générales en rapport avec le thème choisi. Il peut même demander la résolution d'un exercice qui n'a pas été proposé par le candidat.

Le jury tient à garder suffisamment de temps pour cette partie qui lui permet de vérifier la solidité des connaissances du candidat. Il peut pour cela faire abréger ou interrompre un candidat qui passerait trop de temps dans les deux premières étapes de son épreuve.

Le candidat ne doit pas se laisser effrayer par les questions : tous les ans on voit des candidats bien notés quitter la salle de leur épreuve avec l'impression d'une contre-performance parce qu'ils n'ont pas su répondre aux dernières questions posées.

Rigueur, clarté, précision

Le jury apprécie particulièrement les candidats qui arrivent à garder un discours clair et précis tout au long de leur épreuve.

Malheureuesment, beaucoup de candidats manquent de rigueur dans les enchaînements logiques. Dans la résolution des exercices, peu de candidats vérifient avec soin toutes les hypothèses des théorèmes utilisés. Plusieurs se perdent dans les démonstrations par récurrence. Les équivalences entre systèmes linéaires sont souvent très mal maîtrisées.

Le jury déplore un maniement maladroit et souvent erroné des développements limités ou asymptotiques, des équivalents, des notations de Landau. Ces outils très agréables lorsqu'ils sont utilisés correctement, deviennent des pièges terribles s'ils sont maniés sans précaution.

On a constaté un grand nombre d'imprécisions et de confusions. Plusieurs candidats mélangent convergence absolue et convergence uniforme (d'une série de fonctions). D'autres confondent convergence d'une intégrale et son éventuel calcul.

Conclusion

La seconde épreuve orale comporte plusieurs difficultés : choix adéquat des exercices ; motivation des exercices proposés ; recul lors de la résolution.

Réussir cette épreuve n'est pas le résultat d'une compilation d'exercices classiques, mais plutôt d'une réflexion approfondie sur la manière de comprendre et de faire comprendre le programme de l'agrégation.

Bibliothèque de l'agrégation

6 Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques Tomes 1A,1B,2,3,4,5,6,7	Ellipses
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod
ANDREWS G.	Number Theory	Dover
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG.	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie Tome I Tome II	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus tome 4	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques 1. Algèbre 2. Analyse 3. Compléments d'analyse 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Equations différentielles ordinaires	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée Tomes 1 et 2	PUF

AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques Tome 1 Tome 2	Masson
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mac Graw Hill
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	Oxford Science Publications

BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	The mathematical association of America
BONNANS GILBERT LE MARECHAL SAGASTIZABAL	Optimisation numérique	Springer
BOURBAKI N.	Eléments de Mathématique Topologie générale, chapitres V à IX Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII Intégration, chapitres I à IV.	Hermann
BOUVIER A. RICHARD D.	Groupes	Hermann
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	Springer
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand Colin
BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J.	Microcomputers and Mathematics	Cambridge
CABANE R. LEBOEUF C.	Algèbre linéaire 1. Espaces vectoriels , Polynômes 2. Matrices et réduction	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Anneaux-Corps vol. 1 Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel	Hermann

CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 2,3	Masson
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	Springer-Verlag
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHRISTOL G.	Algèbre 1	Ellipses
CHRISTOL G.	Algèbre 2	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Masson
COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley
COLLECTIF	Les Nombres	Vuibert
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman et Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF

COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics Volume 1 Volume 2	John Wiley
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
CROUZEIX M. **MIGNOT A.**	Analyse numérique des équations différentielles	Masson
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson
DE KONNINCK **MERCIER**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	Que-sais-je ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini

DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DIEUDONNE J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann
DIEUDONNE J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNE J.	Sur les groupes classiques	Hermann
DIEUDONNE J.	Éléments d'Analyse. 2	Gauthier-Villars
DIEUDONNE J.	Éléments d'Analyse. Fondements de l'analyse moderne	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle Première année Deuxième année	Gauthier-Villars
DRAPPER N. SCHMITH H.	Applied regression analysis	Wiley
DUBREIL P. DUBREIL-JACOTIN M.L.	Leçons d'Algèbre moderne	Dunod
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DYM H. ITEAN Mac H.P.	Fouriers series and integrals	Academics Press
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. QUEFFEÉLEC H. SACRÉ C. VASSALLO V.	Quelques aspects des mathématiques actuelles	Ellipses
EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes Analyse. Volume 1 Algèbre.	Cédic/Nathan

EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse Analyse 2 : Éléments de topologie générale	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications Volume 1 Volume 2	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse. Tomes 1,2,3,4	Vuibert
FOATA D. **FUCHS A.**	Calcul des probabilités	Masson
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques oraux X-ens Algèbre 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	Masson
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève et le professeur	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Anneaux	Hermann
FRESNEL J.	Groupes	Hermann

FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices Tome 1 Tome 2	Dunod
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	Springer
GOBLOT R.	Algèbre commutative	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	Masson
GODEMENT R.	Analyse tomes 1, 2, 3	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation I Topologie et Analyse fonctionnelle	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales Tomes 1,2,3,4	PUF
GOURDON X.	Algèbre	Ellipses
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' : analyse	Ellipses
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration	Hermann

GREUB W.	Linear Algebra	Springer Verlag
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini
HAMMAD P. et TARANCO A.	Exercices de probabilités	Cujas
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas
HAMMER **HOCKS** **KULISH** **RATZ**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis Volume 1,2,3	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
HUBBARD **WEST**	Équations différentielles et systèmes dynamiques	Springer
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer-Verlag
IREM des Pays de Loire	Exercices de géométrie élémentaires	

ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra Tome I Tome II	Freeman and Co
KAHANE CARTIER ARNOLD et al.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERBRAT Y. BRAEMER J-M.	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
KNUTH D.E.	The art of computer programming Volume 1 : Fundamental algorithms Volume 2 : Seminumerical algorithms Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOLMOGOROV A. FOMINE S.	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	Dunod
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier Analysis	Cambridge
KÖRNER T.W.	Fourier Analysis	Cambridge
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUG
LANG S.	Algèbre linéaire Tome 1 Tome 2	InterEditions
LANG S.	Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley

LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LAVILLE	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
LAX D.	Linear Algebra	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar	Cassini
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSE S. **HEMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales 1 : Topologie 3 : Intégration et sommation 4 : Analyse en dimension finie 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques Tomes 1,2,3,4	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques Tome 1 : Algèbre Tome 2 : Analyse Tome 3 : Géométrie et cinématique Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre 1 : Structures fondamentales 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars

MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle Tome 1 : Exercices et corrigés Tome 2 : Exercices et corrigés Tome 3 : Exercices et corrigés Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MNEIMNE R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales : Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	Ellipses
MONIER J.M.	Algèbre et géométrie MPSI Algèbre et géométrie MP Analyse MPSI, Analyse MP	Dunod
MONIER J.M.	Cours de mathématiques Algèbre 1, Algèbre 2 Analyse 2, Analyse 4	Dunod

MUTAFIAN C.	Le défi algébrique Tome 1 Tome 2	Vuibert
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction . Ecole Polytechnique	Ellipses
MAC LANE S. **BIRKHOFF G. Algèbre**	1 : Structures fondamentales 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers	The Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge
OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1	Cassini
OUVRARD J.Y.	Probabilités 2	Cassini
PAPINI O.	Algèbre discrète et codes correcteurs	Springer
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	Ellipses

PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis Volume I Volume II	SPRINGER-VERLAG
QUEFFELEC H. **ZUILY Cl.**	Eléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales 1- Algèbre 2- Algèbre et applications à la géométrie 3- Topologie et éléments d'analyse 4- Séries et équations différentielles 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions Algèbre - Analyse 1,2	MASSON
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON

RUDIN W.	Functional analysis	Mac Graw-Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mac Graw-Hill
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SCHWARTZ L.	Analyse I Topologie générale et analyse fonctionnelle II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	Analyse 3	Ellipses
SERVIEN Cl.	Analyse 4	Ellipses

SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Géométrie	Masson
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TENENBAUM G.	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique I Théorie des fonctions II Equations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson
VEIGNEAU S.	Approche impérative et fonctionnelle de l'algorithmique	Springer
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles	Hermann

WARUSFEL A.	Cours de mathématiques spéciales.	DUNOD
WARUSFEL A.	Cours de mathématiques supérieures.	DUNOD
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology	Academic Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	Dover
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	Dover
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	Cassini

7 Ouvrages non autorisés à l'oral lors de la session 2004

AGRÉGATION INTERNE ET CAERPA DE MATHÉMATIQUES

OUVRAGES NON AUTORISÉS POUR L'ORAL

N'est autorisé aucun ouvrage se présentant comme un recueil de « leçons modèles », notamment :

AVEZ A. Analyse pour l'agrégation [Masson]

AVEZ A. La leçon d'analyse à l'Oral de l'agrégation [Masson]

AVEZ A. La leçon de géométrie à l'Oral de l'agrégation [Masson]

CHAMBERT-LOIR A. Exercices de mathématiques pour l'agrégation,
tome I, 1^{re} édition [Masson]

CORTIER J.P. Exercices corrigés d'algèbre et géométrie [CRDP de Champagne Ardenne]

DUMAS Laurent Modélisation à l'oral de l'agrégation. Calcul Scientifique [Ellipses]

GUENARD F. Vademecum de l'oral d'analyse, agrégation de mathématiques [Eska]

MADERE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'algèbre [Ellipses]

MADERE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'analyse [Ellipses]

MADERE K. Développement pour leçon d'analyse, agrégation de mathématiques [Ellipses]

MADERE K. Développement pour leçon d'algèbre, agrégation de mathématiques [Ellipses]

MEUNIER P. Exercices pour l'agrégation interne de mathématiques [PUF]

MEUNIER P. Préparation à l'agrégation interne, IREM de Montpellier [PUF]

TOULOUSE P.S. Thèmes de probabilités et statistiques, agrégation de mathématiques [Dunod]