Programme de l'agrégation interne de mathématiques

BO n°3 du 29 avril 1999 (pdf)

Un professeur de mathématiques devrait avoir élaboré et intériorisé une vue globale, personnelle et cohérente de ses connaissances dans sa discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres disciplines. La préparation à l'agrégation interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'enseignement secondaire étant d'autre part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances.

S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi qu'il est proposé certains rapprochements qui peuvent être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut d'abord être approchée dans un cadre particulier, puis sous un cadre plus général.

A. PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ce programme comporte tous les programmes des classes de la seconde à la terminale incluses, dans toutes les sections.

B. PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

I. Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Application. Relation d'ordre.
Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Ensemble dénombrable. Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.
Relation d'équivalence et ensemble quotient.

⇧

II. Algorithmique et informatique

Exemples d'algorithmes liés au programme.
Notion de variable, d'adresse. Instruction d'affectation, instructions conditionnelles, programmation itérative et récursive.
Fonctions et sous-programmes ; passage de paramètre. Rédaction en français ou en Pascal de programmes ne comportant qu'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes.
Aucun développement théorique n'est au programme.

⇧

III. Algèbre générale

a) Extensions successives de la notion de nombre

Anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bezout. Algorithme d'Euclide. Congruences.

Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax+by=c$.
Corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ des nombres réels, $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorèmes de d'Alembert-Gauss. Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$.
Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines n-èmes de l'unité. Relations d'inclusion dans ces groupes. Polygônes réguliers.

b) Anneaux et corps (écrit seulement)

Définition (les anneaux sont unitaires par définition). Formule du binôme. Idéaux d'un anneau commutatif. Morphismes d'anneaux. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intégres. Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications (équation $x^2+y^2=z^2$ dans $\mathbb{Z}$).
Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$. Nombres transcendants.

c) Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif IK

Algèbre IK[X]. Division euclidienne. Idéaux de IK[X]. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorèmes de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en facteurs irréductibles.
Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où IK=$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.
Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
Dérivation des polynômes. Identité de Taylor.

d) Fractions rationnelles sur un corps commutatif IK

Corps IK(X) des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité.
Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

⇧

IV. Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes devront être illustrées dans des situations géométriques (par exemple isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube).
Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un éléments. Théorème de Lagrange. Image et noyau.
Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.
Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, classes de sous-groupes conjugués. Signification géométrique des notions de conjugaison. Automorphismes intérieurs d'un groupe.
Polygones réguliers et groupes diédraux.
Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produits de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.
Groupes GL(E) et SL(E) où E est un espace vectoriel de dimension finie. Groupes O(E) et SO(E) où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes U(E) et SU(E) où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Formes réduites des isométries affines en dimension 2 et 3. Groupes des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

⇧

V. Algèbre linéaire sur un sous-corps de $\mathbb{C}$

a) Espaces vectoriels

Définition. Applications linéaires. Espaces vectoriels $\mathcal{L}$(E,F). Algèbre $\mathcal{L}$(E). Groupe linéaire GL(E). Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.
Sous-espaces vectoriels. Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.
Familles libres, génératrices, bases.
Étant donné u de $\mathcal{L}$(E,F), isomorphisme entre Im(u) et tout supplémentaire de Ker(u).

● Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

b) Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.
Formule liant dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Formule du rang. Caractérisation des automorphismes.

c) Matrices

Espaces $M_{p,q}$(IK) des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans IK. Isomorphisme canonique avec $\mathcal{L}$(IK$_q$,IK$_p$). Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe GL(n,IK).
Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis d'une base. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Utilisation des sous-matrices carrées pour la détermination du rang. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée. Matrice d'un endomorphisme d'un espace rapporté à une base. Matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
Systèmes d'équations linéaires. Rang. Conditions de compatibilité. Systèmes de Cramer. Résolution par opérations élémentaires (pivot de Gauss). Applications à des problèmes de géométrie.

d) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Application à la résolution de systèmes linéaires, aux calculs de déterminants, à l'inversion de matrices carrées et au calcul de rang.
Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections.
Génération de GL(n,IK) et SL(n,IK).

e) Déterminants

Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'un composé d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée. Expression développée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.
Application à l'inversion d'une matrice carrée. Formules de Cramer. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calcul de volumes simples.

Groupes SL(E) et SL(n,IK).

f) Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équation d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base. Application à la formule d'interpolation de Lagrange. Bijection entre les ensembles des sous-espaces de E et de E* par l'orthogonalité. Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.
Transposée d'une application linéaire. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

g) Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme.
Algèbre IK[u] des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.
Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, si le polynôme caractéristique est scindé.
Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Théorème de Cayley-Hamilton.
Théorème de décomposition des noyaux. Polynôme minimal. Sous-espaces caractéristiques.
Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme scindé annulateur à racines simples.
Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.
Diagonalisation par blocs. Sous-espaces caractéristiques. Décomposition de Dunford : existence et unicité de l'écriture $u=d+n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$ si le polynôme caractéristique est scindé.
Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes, systèmes différentiels, etc.).

h) Cas où le corps IK est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $\mathcal{L}$(E). Définition de exp(u), application aux systèmes différentiels.

Exemples de parties denses de $\mathcal{L}$(E) : GL(E) est un ouvert dense de $\mathcal{L}$(E); si IK=$\mathbb{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $\mathcal{L}$(E).

i) Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.
Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

⇧

VI. Géométrie affine en dimension finie

Le corps de base est $\mathbb{R}$.
Définition d'un espace affine. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans. Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.
Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphismes du stabilisateur d'un point et du groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.
Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.
Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

⇧

VII.Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

- Les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.

a) Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt.
Projecteurs et symétries. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale.
Groupe orthogonal O(E) et spécial orthogonal SO(E).
Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormée. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux axes de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.
Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.
Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

b) Angles

Matrice d'une rotation. Le groupe SO(E) est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires.
Morphisme canonique de $\mathbb{R}$ vers SO(2). Mesure des angles.
Angles orientés de droites en dimension 2.
Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de SO(E) par les demi-tours.
Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

c) Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

d) Calcul vectoriel en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.

e) Espaces hermitiens

Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales.
Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire U(E) et spécial unitaire SU(E).
Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

⇧

VIII.Géométrie affine euclidienne orientée

a) Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.
Groupe des isométries et des déplacements.
Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.
Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où *t* est une translation et *f* une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.
Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.
Groupe des similitudes.

b) Géométrie plane

Propriété angulaire du cercle et applications.
Faisceau harmonique de deux droites et de leurs bissectrices.
Géométrie du triangle, éléments remarquables.
Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Orthogonalité entre cercles.

c) Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice.
Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification en les trois genres affines : ellipse, parabole, hyperbole. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.
Section plane d'un cône de révolution.

Trajectoire parabolique d'un objet pesant. Mouvement à accélération centrale. Mouvement des planètes.

⇧

IX. Propriétés affines et métriques

Pour toutes les situations géométriques, on réfléchira aux propriétés de caractère affine et à celles de nature métrique.
Groupes affines et groupes euclidiens.
Propriétés affines et euclidiennes des coniques.
Notions différentielles de caractère affine et métrique.
Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

⇧

X. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels ou complexes

Corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ des réels et complexes. La construction de $\mathbb{R}$ étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.

Complétude de $\mathbb{R}$: toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite majorée.
Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.
Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (*u* est négligeable devant *v*), équivalence. Notations : $u=O(v)$ et $u=o(v)$.
Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

b) Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Étude de la convergence par les relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.
Critères de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemple d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.
Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

c) Continuité

Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$. Limite, continuité à droite et à gauche, continuité.
Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrema. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction monotone *f* sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.
Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

d) Dérivabilité

Dérivabilité à droite et à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalités des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.

Dérivées successives. Fonctions de classe C^k, de classe C^k par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ème d'un produit.
Fonctions convexes de classe C^1, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe C^2.
Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe C^k.
Étude locale des fonctions. Conditions nécessaires d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.
Série de Taylor.

e) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions.
Fonctions hyperboliques directes et réciproques.
Fonctions circulaires directes et réciproques.

f) Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégrations par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

g) Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Formule de Fubini si le paramètre décrit un segment. Lien avec les intégrales doubles.

h) Intégration sur un intervalle quelconque

- Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I de définition.

Intégrale d'une fonction positive. Emploi des relations de comparaison.
Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.
Les deux théorèmes suivants sont admis :
Théorème de convergence monotone : soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des intégrales des f_n est majorée, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.

i) Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Intégration par parties.
Emploi de relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.

j) Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes suivants sont admis :
Théorème de continuité : soit f une fonction continue de deux variables (x,t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X. Si le module de $f(x,t)$ est majoré par $g(t)$, où g est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x,t)$ sur I est continue sur X.
Théorème de dérivation : soit f une fonction continue de deux variables (x,t) définie sur un produit $X \times I$ d'intervalles, intégrable en t sur I pour tout x fixé dans X et admettant une dérivée partielle f'_x par rapport à x. Si le module de $f'_x(x,t)$ est majoré par $h(t)$, où h est continue et intégrable sur I, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x,t)$ sur I est dérivable sur X et sa dérivée est l'intégrale de f'_x par rapport à t.
Exemples de fonctions définies par une intégrale (fonction Gamma d'Euler, transformée de Fourier).

k) Analyse numérique

Approximation d'un nombre par des suites : rapidité de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.
Approximation d'une solution d'équation $f(x)=0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.

Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur.
Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente ; recherche d'une valeur approchée de la somme d'une telle série.
Solutions approchées d'une équation différentielle $x'=f(t,x)$ par la méthode d'Euler.

⇧

XI. Analyse à une variable complexe

a) Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul de rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.
Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Dérivation par rapport à la variable complexe sur ce disque ouvert.

b) Extension à $\mathbb{C}$ des fonctions usuelles

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π, fonctions sinus et cosinus. Application à la mesure des angles.

⇧

XII. Analyse fonctionnelle et vocabulaire de la topologie

a) Topologie et espaces métriques

Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques.
Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace tout entier, caractérisation par les images réciproques des ouverts et des fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

b) Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Normes. Distances associées à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. Applications linéaires continues, normes de ces applications.

c) Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.
Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.

d) Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbb{R}$.
Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

e) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

f) Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.
Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui-même. Application aux approximations successives.
Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

g) Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach.
Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espaces de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.
Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme.
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1 simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.
Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

h) Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.
Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

i) Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthogonalité des fonctions e^{inx}. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π-périodique f continue par morceaux. Sommes partielles $S_n(f,x)=\sum_{-n\leq k\leq n} c_k(f)e^{ikx}$. Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.
Théorèmes de convergence de Dirichlet et Féjer. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe C^1 par morceaux.

⇧

XIII.Calcul différentiel

- Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

a) Topologie de $\mathbb{R}^n$

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$; elles sont équivalentes. Complétion. Parties compactes. Limites et applications continues.

b) Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrices jacobiennes, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée.
Définition des fonctions de classe C^1 sur un ouvert Ω : l'application associant à un point de Ω sa différentielle est continue.
Théorème admis : pour que f soit de classe C^1, il faut et il suffit que les dérivées partielles soient continues sur Ω.
Composition des fonctions de classe C^1. Difféomorphismes. Caractérisation des difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe C^1. Inégalités des accroissements finis pour les fonctions de classe C^1. Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe C^1 sur un ouvert connexe.
Applications de classe C^k. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe C^2.
Gradient d'une fonction numérique de classe C^1. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe C^2.
Extrema locaux d'une fonction de classe C^2 de deux variables en un point où $rt-s^2\neq0$. Exemples de problèmes d'extremum issus de la géométrie.
Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des C^k-difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe C^k.

c) Équations différentielles

Systèmes linéaires $X'=A(t)X+B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathbb{C}^n$).
Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.
Dimension de l'espace vectoriel des solutions. Méthode de la variation des constantes.

Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système X'=AX par diagonalisation ou triangularisationde A ou emploi du théorème de Cayley-Hamilton. Équations linéaires scalaires à coefficients constants. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.
Équations linéaires scalaires $x''+a(t)x'+b(t)x=c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variations des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.
Notions sur les équations scalaires non linéaires (écrit seulement).
Solutions d'une équation $x'=f(t,x)$, ou $x''=f(t,x,x')$, où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$; existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas C^1.
Exemples d'études qualitatives.
Résolution d'équations à variables séparables et homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.
Applications en physique et en géométrie différentielle.

⇧

XIV.Calcul intégral et probabilités

a) Intégrales multiples

- Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force. Intégrales doubles et triples. Linéarité et additivité par rapport aux ensembles. Théorème de Fubini-Tonelli : si f est une fonction de deux variables continue positive, on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f.
Extension au cas du produit d'une fonction de deux variables continue positive et d'une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple.
Extension des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini au cas des fonctions de n variables.
Applications à des calculs d'intégrales.
Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.
Exemples de calculs d'aires et de volumes.

b) Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des événements élémentaires) ; tribu (ou σ-algèbre) des événements ; mesure de probabilité sur cette tribu. Étude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

c) Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B[A]$ de A sachant B si $\mathbb{P}[B]$ est positif. Formule des probabilités composées et formule de Bayes. Indépendance d'un nombre fini d'événements.

d) Variables aléatoires réelles

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega,F,\mathbb{P})$, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r. en abrégé), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que l'image réciproque $X^{-1}(I)$ de tout intervalle I de $\mathbb{R}$ appartienne à la tribu F. On admettra que la somme, ou le produit, de deux v.a.r. est une v.a.r..

On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :

- Variables aléatoires réelles discrètes. Une v.a.r. est dite discrète si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart-type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli ; loi binomiale ; loi géométrique et loi de Poisson.

- Variables aléatoires réelles possèdant une loi avec densité. On appelle densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe “Intégration sur un intervalle quelconque"). Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f, si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}[\{X\in I\}]=\int_I f(x)dx$. Fonctions de répartition et moments (espérance, variance et écart-type) d'une v.a.r. possèdant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possèdant une densité (résultat admis). Lois usuelles possèdant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné ; loi exponentielle ; loi normale.

Si X est une v.a.r. de loi de densité *f* et si Φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on admettra que $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par $\mathbb{E}[\Phi(X)]=\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)f(x)dx$.

e) Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X=(X_1, ..., X_p)$ de Ω dans $\mathbb{R}^p$ est un vecteur aléatoire si chacune de ses composantes est une v.a.r.. On se limitera aux deux cas suivants :

- Vecteurs aléatoires discrets. Un vecteur aléatoire $X=(X_1, ..., X_p)$ de Ω dans $\mathbb{R}^p$ est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète. Loi d'un vecteur aléatoire X. Indépendances de *p* v.a.r. discrètes. Covariance et coefficients de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de *p* v.a.r. discrètes indépendantes.
- Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité. On appelle densité de probabilité sur $\mathbb{R}^p$ toute fonction *f* de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et d'intégrale égale à 1 (On se limitera à la notion d'intégrales définie dans le paragraphe “Intégrales multiples"). Soit f une densité de probabilités sur $\mathbb{R}^p$. On dit qu'un vecteur aléatoire $X= (X_1, ..., X_p)$ possède la loi de densité *f* si, pour tous intervalles $I_1, ..., I_p$ de $\mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}[\{X_1 \in I_1\} \cap ... \cap \{X_p \in I_p\}]=\int_{I_1} ... \int_{I_p} f(x_1, ..., x_p)dx_1... dx_p.$$

Soit $X= (X_1, ..., X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit ψ un produit d'une fonction continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ par une fonction indicatrice d'un domaine “géométriquement simple" de $\mathbb{R}^p$ et telle que la fonction $|\psi|$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^p$. On admettra que $\psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :
$$E[\psi(X)]=\int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \psi(x_1, ...,x_p)f(x_1, ..., x_p)dx_1... dx_p.$$
Indépendance de *p* v.a.r. possèdant une loi de densité. Covariance et coefficent de corrélation d'un couple de v.a.r. possèdant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de *p* v.a.r. indépendantes et possèdant une loi avec densité. Loi normale.

f) Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Inégalité de Bienaimé-Tchebychev et loi faible des grands nombres.
Les résultats suivants sont admis : loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendants équidistribuées possèdant une espérance. Théorème central limite pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi normale (loi de Gauss).

⇧

XV.Géométrie différentielle

- Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

a) Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.
Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace, plan osculateur.

b) Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1. Abscisse curviligne.
En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure.
En dimension 3, repère de Frenet. Courbure, torsion.

c) Cinématique

Vitesse, accélération. Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, circulaires à accélération centrale. Oscillateurs harmoniques. Exemples de problèmes de mécanique (pendule, chute des corps, mouvements des planètes).

⇧