UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Pour tout entier naturel n, on pose
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que, pour tout entier n, $I_n > 0$.

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4) Montrer que, pour tout entier naturel n, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. En déduire I_n pour tout n.

5) Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

6) Montrer que la suite $\big((n+1)I_nI_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Éléments de solution

1) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

2) Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, la fonction cos est positive donc $I_n \geq 0$. Supposons que $I_n = 0$. Alors, comme la fonction $\cos^n$ est continue et positive sur $[0, \pi/2]$, elle est nulle sur cet intervalle. Absurde. On a donc, pour tout entier naturel n, $I_n > 0$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t(\cos t - 1) \, dt$$
Or, $\cos t - 1 \leq 0$ et, pour $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n(t) \geq 0$. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

4) On va montrer l'égalité en faisant une intégration par parties ; celle-ci est justifiée par le fait que les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \cos^n t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle fermé d'intégration.
$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, (1 - \sin^2 t) \, dt \\
&= I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n t \sin t) \sin t \, dt \\
&= I_n - \left[\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t(-\cos t) \, dt \\
&= I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}
\end{aligned}$$
On en déduit que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$.
On montre alors par récurrence que
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$
$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

5) Comme la suite (I_n) est décroissante et strictement positive, on a

$$0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

En divisant par I_n qui est strictement positive et en utilisant la relation obtenue à la question précédente, on en déduit que

$$0 < \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

On en déduit, par le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et donc que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.

6) Soit $n \geq 0$, alors $u_n = (n+1)I_nI_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = u_{n+1}$. On en déduit que la suite (u_n) est constante et donc que, pour tout entier naturel n, $(n+1)I_nI_{n+1} = I_0I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

L'équivalence obtenue à la question précédente donne alors

$$I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

Or $I_n > 0$ donc on peut prendre la racine carrée et on obtient le résultat demandé.