UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit (u_n) une suite bornée de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.
Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Éléments de solution

La suite étant bornée, elle admet une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. L'ensemble E de ses valeurs d'adhérence est donc non vide. S'il ne contient qu'un point, c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
E est un ensemble borné car la suite est bornée.
Supposons qu'il contienne au moins deux points $\ell_1 < \ell_2$ et montrons que c'est un intervalle, c'est-à-dire que tout point $x \in]\ell_1, \ell_2[$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Soit $x \in]\ell_1, \ell_2[$. On veut montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - x| \leq \varepsilon$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_0$, $|u_{n+1}-u_n| \leq \varepsilon$. On peut supposer $N_0 \geq N$.
- Comme ℓ_1 est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), il existe $N_1 \geq N_0$, $u_{N_1} < x$.
- Comme ℓ_2 est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), il existe $N_2 \geq N_1$, $x < u_{N_2}$.

Appellons A l'ensemble défini par $A = \{n \in \mathbb{N}\,;\, N_1 \leq n \leq N_2 \text{ et } u_n < x\}$.
A n'est pas vide car $N_1 \in A$.
Il est borné et c'est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Il admet donc un plus grand élément M avec $N_1 \leq M \leq N_2 - 1$ et on a $u_M < x \leq u_{M+1}$ donc $0 \leq u_{M+1} - u_M$.
Or $|u_{M+1} - u_M| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $0 \leq u_{M+1} - u_M \leq \varepsilon$. On en déduit que $|u_M - x| \leq \varepsilon$.

On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $M \geq N$ telque $|u_M - x| \leq \varepsilon$, ce qui est le résultat demandé.