UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit n un entier naturel. On note (E_n) l'équation

$$(E_n) \qquad \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} = 0.$$

1) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution réelle α_n.
2) Montrer que la suite (α_n) diverge.

Éléments de solution

1) Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On a alors $P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = P_{n-1}(x)$.
Comme $P_2(x) = x^2/2 + x + 1 > 0$, P_3 est strictement croissant. Or $\lim_{x\to-\infty} P_3(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_3(x) = +\infty$. De plus P_3 est continu donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc existence et unicité d'un réel α_1 tel que $P_{2\times1+1}(\alpha_1) = 0$.
On va alors montrer le résultat par récurrence sur n. Soit H_n l'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{2n}(x) > 0 \text{ et } \exists! \alpha_n \neq 0, P_{2n+1}(\alpha_n) = 0 \text{ avec } \begin{cases} P_{2n+1}(x) < 0 \text{ si } x < \alpha_n \\ P_{2n+1}(x) > 0 \text{ si } x > \alpha_n \end{cases}$$

H_1 est vrai d'après ce que l'on vient de montrer.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie.
Comme $P_{2n+2}' = P_{2n+1}$, P_{2n+2} est décroissant sur $]-\infty, \alpha_n[$ et croissant sur $]\alpha_n, +\infty[$. Il admet donc un minimum en $P_{2n+2}(\alpha_n)$.
Or $P_{2n+2}(\alpha_n) = P_{2n+1}(\alpha_n) + \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{2n+2}(x) > 0$.
Comme $P_{2n+3}' = P_{2n+2}$, P_{2n+3} est strictement croissant. Or $\lim_{x\to-\infty} P_{2n+3}(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_{2n+3}(x) = +\infty$. de plus P_{2n+3} est continu donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc existence et unicité d'un réel α_{n+1} tel que $P_{2n+3}(\alpha_{n+1}) = 0$. De plus $P_{2n+3}(0) = 1$ donc $\alpha_{n+1} \neq 0$.
On en déduit également que $P_{2n+3}(x)$ est strictement négatif (respectivement strictement positif) si $x \in]-\infty, \alpha_{n+1}[$ (respectivement $x \in]\alpha_{n+1}, +\infty[$). On a alors montré que H_{n+1} est vraie.
On a donc montré par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un unique réel α_n tel que $P_{2n+1}(\alpha_n) = 0$.

2) Soit $M \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{n\to+\infty} P_{2n+1}(M) = e^M > 0$. On a donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow P_{2n+1}(M) > 0)$$
$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow P_{2n+1}(M) > P_{2n+1}(\alpha_n))$$

Or la fonction P_{2n+1} est strictement croissante. On a donc montré que

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow M > \alpha_n)$$