Exercice

Soient (a_n) et (b_n) définies par la donnée de $a_0 \geq 0$ et $b_0 \geq 0$ et par

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \end{aligned} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

Montrons que ces deux suites convergent vers la même limite.

Éléments de solution

On vérifie, par récurrence, que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies en montrant que, pour tout entier naturel n, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$.
De plus

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n \geq b_n$.
Or $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ donc la suite (a_n) est décroissante.
De même, $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \leq 0$. Donc la suite (b_n) est croissante.
Montrons enfin que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \left(\frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - b_n)\left(\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}\right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $a_n - b_n \geq 0$ et $\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$. On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1 - b_1).$$

On a donc prouvé que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$, que la suite (b_n) est croissante et la suite (a_n) est décroissante. Ce sont donc des suites adjacentes ; on en déduit qu'elles sont convergentes et qu'elles ont même limite.