Exercice

Soient a, b, c et d 4 réels avec $c \neq 0$ et $\delta = ad - bc \neq 0$. On définit une fonction f par

$$f : \left[\begin{array}{r} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array} \right.$$

1) Étudier le nombre de points fixes de f.

2) Montrer que f est bijective.

3) Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Pour quelles valeurs de x_0, la suite vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est-elle définie ? Distinguer des cas suivant le nombre de points fixes de f.

4) Étudier la convergence de la suite lorsqu'elle est définie.

Éléments de solution

1) Soit ℓ un point fixe de f, s'il existe. On a alors

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell \iff (c\ell + d)\ell &= a\ell + b \\ c\ell^2 + (d-a)\ell - b &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré ($c \neq 0$) vaut $\Delta = (a+d)^2 - 4\delta$. Il y a trois cas à considérer :

- $\Delta > 0$. L'application f a deux points fixes distincts.
- $\Delta = 0$. L'application f a un unique point fixe : $\dfrac{a-d}{2c}$.
- $\Delta < 0$. L'application f n'a pas de point fixe.

2) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Montrons qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ tel que $y = f(x)$.

$$y = f(x) \iff x(a - cy) = dy - b, \text{ or } a - cy \neq 0$$
$$\text{donc } y = f(x) \iff x = \frac{dy-b}{a-cy}$$

L'application f est donc bijective et son application réciproque est définie par

$$f^{-1} : \left[\begin{array}{r} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ x \mapsto \dfrac{-dx+b}{cx-a} \end{array} \right.$$

3) Supposons que f ait deux points fixes distincts α et β (réels ou complexes). Si x_0 vaut α ou β, alors la suite est définie et constante. Supposons x_0 différent des deux points fixes de f. Comme f est injective, on en déduit que, pour tout entier naturel n, u_n est différent de α et de β.

La suite (u_n) est définie si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -\dfrac{d}{c}$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = -\dfrac{d}{c}$ et notons k_0 le plus petit d'entre eux.

Posons $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ pour $n \leq k_0$. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{f(u_{n-1}) - f(\alpha)}{f(u_{n-1}) - f(\beta)} \\ &= \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} v_{n-1} \text{ après calculs} \end{aligned}$$

Posons $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}$.

On en déduit que $v_0 = q^{-k_0} v_{k_0}$. Or $u_{k_0} = -\dfrac{d}{c}$ donc $v_{k_0} = q^{-1}$. D'où $v_0 = q^{-k_0-1}$. Comme $u_0(v_0 - 1) = \beta v_0 - \alpha$, on a deux cas où la suite n'est pas définie : soit $v_0 = 1$ (c'est-à-dire $q^{k_0+1} = 1$), soit $u_0 = \dfrac{\beta v_0 - \alpha}{v_0 - 1} = \dfrac{\alpha q^{k_0+1} - \beta}{q^{k_0+1} - 1}$.

Supposons maintenant que f ait un unique point fixe α. Si $u_0 = \alpha$, alors la suite est constante et égale à α. Supposons $u_0 \neq \alpha$. Alors, comme f est bijective, pour tout entier n, $u_n \neq \alpha$. La suite (u_n) est définie si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -\dfrac{d}{c}$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = -\dfrac{d}{c}$ et notons k_0 le plus petit d'entre eux.

Posons $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ pour $n \leq k_0$. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{f(u_{n-1}) - f(\beta)} \\ &= \frac{2c}{a + d} + v_{n-1} \text{ après calculs} \end{aligned}$$

Posons $r = \dfrac{2c}{a + d}$. (Remarquons que dans ce cas $\Delta = 0$ donc, si $a + d = 0$, alors $ad - bc = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ).

On en déduit que $v_{k_0} = k_0 r + v_0 = \dfrac{1}{u_{k_0} - \alpha} = \dfrac{-1}{\frac{d}{c} - \frac{a-d}{2c}} = -r$. Or $\dfrac{1}{u_0 - \alpha} = v_{k_0} - k_0 r$, donc $u_0 = \alpha + \dfrac{1}{v_{k_0} + k_0 r} = \alpha - \dfrac{1}{(k_0 + 1) r}$.

Finalement la suite (u_n) est définie si u_0 n'appartient pas à l'ensemble E avec

- si $(a + d)^2 \neq 4(ad - bc)$, $E = \{\frac{\alpha^{k+1} - \beta}{q^{k+1} - 1} ; k \in \mathbb{N}$ avec $q^{k+1} \neq 1\}$ où α et β sont les deux points fixes distincts de f et $q = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$
- si $(a + d)^2 = 4(ad - bc)$, $E = \{\alpha - \dfrac{1}{(k + 1) r} ; k \in \mathbb{N}\}$ où α est l'unique point fixe de f et $r = 2c/(a + d)$.

4) La fonction f étant continue, la suite (u_n) ne peut converger que vers un point fixe de f. Donc si $(a+d)^2 < 4(ad-bc)$, alors (u_n) diverge.

Si $(a + d)^2 > 4(ad - bc)$, alors f a deux points fixes. On reprend les notations de la question précédente et on se place dans le cas où $u_0 \notin E$.

On a $v_n = q^n v_0$ et $u_n = \dfrac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1}$. On en déduit que

- si $|q| < 1$, alors (v_n) tend vers 0 et (u_n) est une suite convergente qui converge vers α.
- si $|q| > 1$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ donc la suite (u_n) converge vers β.
- on ne peut pas avoir $q = 1$ car α et β sont distincts.
- si $q = -1$, alors (u_{2n}) converge vers $\dfrac{\beta v_0 - \alpha}{v_0 - 1}$ et (u_{2n+1}) converge vers $\dfrac{\beta v_0 + \alpha}{v_0 + 1}$. Donc la suite (u_n) ne peut converger que si ses deux valeurs d'adhérence sont égales. On vérifie qu'elles ne peuvent être égales que

si $v_0 = 0$. Or $v_0 \neq 0$. Donc la suite (u_n) diverge. (Remarquons que le fait que $u_0 \notin E$ empêche peut-être d'avoir ce cas)

Si $(a+d)^2 = 4(ad-bc)$, alors f a un unique point fixe. On reprend les notations de la question précédente et on se place dans le cas où $u_0 \notin E$.
On a $v_n = v_0 + nr$ et $u_n = \alpha + \dfrac{1}{v_0 + nr}$. On en déduit que la suite (u_n) converge vers α.