UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers un réel ℓ. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que la suite (v_n) converge vers ℓ.

Application - Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2kn+k}$

Éléments de solution

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Soit $n \geq n_0$, on a

$$v_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}(u_k-\ell) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}(u_k-\ell) \text{ donc}$$
$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n_0}(u_k-\ell)\Big| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k-\ell|$$

Or, pour n_0 fixé, $\displaystyle\frac{1}{n}\lim_{n\to+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{n_0}(u_k-\ell)\Big| = 0$. Donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_1$, $\displaystyle\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n_0}(u_k-\ell)\Big| < \varepsilon$.
On a donc, pour tout entier $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$\begin{aligned}|v_n - \ell| &< \varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}\varepsilon \\ &< \varepsilon + \frac{n-n_0}{n}\varepsilon < 2\varepsilon\end{aligned}$$

On a alors prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
Application - Il suffit d'écrire

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2kn+k} = \frac{n}{2n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Remarque : on a également les résultats suivants :

- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- si (u_n) est monotone et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. (si (u_n) est monotone, alors soit elle converge vers un réel ℓ, soit elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Raisonner ensuite par l'absurde en utilisant le lemme de Césaro)