UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par a_n le périmètre d'un polygone régulier à 2n côtés inscrit à $\mathscr{C}$, puis par b_n le périmètre dun polygone régulier à 2n côtés circonscrit à $\mathscr{C}$.
Montrer que les suite (a_n) et (b_n) sont convergentes et déterminer leurs limites.

Éléments de solution

Par l'inégalité triangulaire, on a $a_n < a_{n+1}$. Par conséquent, (a_n) est une suite croissante. De façon plus formelle, on montre facilement que $a_n = 2^{n+1} \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ et $b_n = 2^{n+1} \tan \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. Comme $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, on a $a_n > 0$ et $b_n > 0$. Par ailleurs comme $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ et $\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= 2\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} > 1 \\
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= 2\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = 1 - \tan^2 \frac{\pi}{2^{n+1}} < 1,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante.
De plus,

$$b_n - a_n = 2^{n+1} \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}}) \left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) - 1} \right) \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont la même limite.
Remarque : leur limite commune est π qui est le périmètre du cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1.