Exercice

On appelle **matrice de Hessenberg** une matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ qui satisfait à $a_{ij} = 0$ pour $j < i-1$. On dit qu'une **matrice de Hessenberg** est **irréductible** si $a_{i,i-1} \neq 0$, pour tout $i = 2, \dots, n$.

1) Soit $p \in \mathcal{P}_n$ un polynôme unitaire, $p(x) = x^n - a_n x^{n-1} - \dots - a_2 x - a_1$. Construire une matrice de Hessenberg irréductible qui admet $(-1)^n p$ pour polynôme caractéristique.

2) Montrer que si A est une matrice de Hessenberg irréductible, alors pour toute valeur propre λ de A, l'espace propre associé est de dimension 1.

3) Démontrer que les valeurs propres d'une matrice de Hessenberg irréductible sont simples si et seulement si la matrice est diagonalisable.

Nous supposons maintenant que la matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ est tridiagonale, symétrique et irréductible. Prenons A de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

4) Montrer que les valeurs propres de A sont simples.

5) Décrire un algorithme de calcul de l'espace propre associé à une valeur propre de A.

Soit maintenant une matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ tridiagonale. Prenons A de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

6) Proposer un algorithme de calcul du polynôme caractéristique de A.

7) Vérifier que A admet les mêmes valeurs propres que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & c_3 b_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & c_4 b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & c_n b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

8) Montrer que si $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, n$ et si $c_{i+1} b_i \in \mathbb{R}_+^*$ pour $i = 1, \dots, n-1$, alors A admet n valeurs propres réelles simples et est diagonalisable.

9) Que peut-on dire si $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et si $c_{i+1}b_i \in \mathbb{R}^*_-$ pour $i = 1, \ldots, n-1$?

Éléments de solution

1) Prenons $p \in \mathcal{P}_n$ de la forme $p(x) = x^n - a_n x^{n-1} \ldots - a_1$. On considère la matrice de Hessenberg irréductible

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ 1 & 0 & \ldots & a_2 \\ 0 & 1 & \ldots & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A, $q_n(\lambda) = \text{Dét}(A - \lambda I)$, satisfait à la relation $q_n(\lambda) = -\lambda q_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n+1}a_1$, où $q_{n-1}(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la sous-matrice de A, obtenue en supprimant la 1° ligne et la 1° colonne de A. On vérifie que

$$\begin{cases} q_n(\lambda) = -\lambda q_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n+1}a_1 \\ q_{n-1}(\lambda) = -\lambda q_{n-2}(\lambda) + (-1)^{n}a_2 \\ \ldots \\ q_2(\lambda) = -\lambda q_1(\lambda) + (-1)^{3}a_{n-1} \\ q_1(\lambda) = a_n - \lambda \end{cases}$$

D'où l'on conclut que $q_n(\lambda) = (-1)^n p_n(\lambda)$. (*On retrouve en fait la matrice-compagnon*)

2) Soit A une matrice de Hessenberg irréductible et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous posons

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2,n-1} \\ 0 & a_{32} & \ldots & a_{3,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & & a_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

On a $\text{Dét}(B_\lambda) = \prod_{i=2}^{n} a_{i,i-1} \neq 0$. Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le rang de A_λ est supérieur ou égal à $n-1$. En particulier si λ est une valeur propre de A alors $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = 1$.

3) Si la matrice A Hessenberg irréductible est diagonalisable, alors $\mathbb{C}^n = \oplus_{k=1}^{p} \text{Ker}(A - \lambda_k I)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A. Par le point précédent nous avons nécessairement $p = n$. Donc les valeurs propres de A sont simples.
Supposons que les valeurs propres de A Hessenberg irréductible soient simples. Cela implique que A possède n valeurs propres de multiplicité 1. Donc A est diagonalisable.

4) Une matrice réelle symétrique a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable. Si elle est tridiagonale irréductible, alors ses valeurs propres sont nécessairement simples d'après le point 3).

5) Soit λ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors nous avons les relations $a_1 x_1 + b_1 x_2 = \lambda x_1$, $b_{k-1}x_{k-1} + a_k x_k + b_k x_{k+1} = \lambda x_k$, $2 \leq k \leq n-1$, $b_{n-1}x_{n-1} + a_n x_n = \lambda x_n$. Si nous avons $x_n = 0$, alors puisque tous les b_i sont différents de 0, nous déduisons que tous les x_i sont nuls. Donc sans restreindre la généralité, nous prenons $x_n = 1$. Alors clairement $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont solution d'un système triangulaire supérieur. Nous sommes conduits à l'algorithme suivant.
Algorithme : Partant de $x_{n-1} = \frac{(\lambda - a_n)}{b_{n-1}}$, pour $k = n-1, \ldots, 2$, calculer $x_{k-1} = \frac{-b_k x_{k+1} - (a_k - \lambda)x_k}{b_{k-1}}$.
N.B. : On redémontre au passage que l'espace propre associé à λ est de dimension 1.

6) Nous notons A_k la sous-matrice principale d'ordre k de A et p_k le polynôme caractéristique de A_k. Alors posant $p_0(\lambda) = 1$, nous déduisons les relations de récurrence $p_1(\lambda) = a_1 - \lambda$ et pour $k = 2, \ldots, n$, $p_k(\lambda) = (a_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - b_{k-1}c_k p_{k-2}(\lambda)$.

7) Le polynôme caractéristique de B s'obtient par les mêmes formules de récurrence que celles obtenues pour calculer celui de A.

8) La matrice A possède le même polynôme caractéristique que la matrice tridiagonale C formée du vecteur diagonal $(a_1, \ldots, a_n)^T$ et des vecteurs extradiagonaux $(\sqrt{c_2 b_1}, \ldots, \sqrt{c_n b_{n-1}})^T$. La matrice C est symétrique, tridiagonale et irréductible. Elle est diagonalisable avec n valeurs propres réelles simples. A admet donc n valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

9) Alors les valeurs propres ne sont plus nécessairement réelles. On peut construire facilement des contre-exemples. L'espace propre associé à une valeur propre est de dimension 1 (mais la valeur propre peut être multiple : 3 est valeur propre double de $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$).