Exercice

On considère la matrice tridiagonale $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 4$, définie par

$$\begin{array}{lll} & a_{11} = 1,\ a_{nn} = 1,\ a_{i,i} = 6 & \text{pour } i = 2, 3, \dots, n-1 \\ & a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1 & \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \\ \text{et} & a_{i,j} = 0 & \text{pour toutes les autres valeurs de } i \text{ et } j. \end{array}$$

1) Montrer que pour $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $2\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\right| \leq x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + x_n^2$.

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a $(Ax, x) \geq 4\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2$, puis que la matrice A est définie positive.

2) Montrer que la matrice A admet une décomposition de Crout $A = LU$ et donner un algorithme permettant de calculer les valeurs de L et U.

Indication : on cherchera ces matrices sous la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 & v_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & v_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1} & v_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

3) En déduire un algorithme de résolution du système linéaire $Ax = b$. On précisera le nombre d'opérations nécessaires.

Éléments de solution

1) On a

$$x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \pm 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \pm x_{i+1})^2 \geq 0$$

d'où l'inégalité cherchée.

Comme $(Ax, x) = x_1^2 + 6\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$, on en déduit $(Ax, x) \geq 4\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, (Ax, x) \geq 0$, ce qui montre que la matrice A est positive ; de plus si $(Ax, x) = 0$, on en déduit $x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0$; on a alors $0 = (Ax, x) = x_1^2 + x_n^2$ d'où aussi $x_1 = x_n = 0$ et par suite $x = 0$. La matrice A est donc définie positive.

2) Par identification on obtient $u_1 = v_2 = 1; \forall i = 2, \dots, n,\ l_i u_{i-1} = 1$; $\forall i = 2, \dots, n-1,\ l_i v_i + u_i = 6$; $\forall i = 2, \dots, n-1, v_{i+1} = 1$ et $l_n v_n + u_n = 1$. On obtient donc immédiatement les valeurs $v_2 = v_3 = \dots = v_n = 1$, $u_1 = l_2 = 1$; les autres valeurs de l_i et u_i s'obtiennent par l'algorithme :
pour $i = 2, 3, \dots, n-1$ on calcule $u_i = 6 - l_i$ et $l_{i+1} = 1/u_i$ enfin on calcule $u_n = 1 - l_n$.
Le coût de cette décomposition est ainsi de $(n-1)$ additions et de $(n-2)$ divisions.

3) Pour résoudre $Ax = b$, on pose $y = Ux$ et on résout successivement $Ly = b$ puis $Ux = y$. Cela nous donne les algorithmes
$y_1 = b_1,\ y_2 = b_2 - y_1$ et, pour $i = 3, 4, \ldots, n$, on calcule $y_i = b_i - l_i y_{i-1}$.
$x_d = y_n/u_n$ et, pour $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, on calcule $x_i = (y_i - x_{i+1})/u_i$.
Cela nécessite $2(n-1)$ additions, $n-2$ multiplications et n divisions, auxquelles il faut rajouter celles nécessaires au calcul des u_i et des l_i.