Exercice

Soient f et g deux endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.

1) Montrer que f et g ont au moins un vecteur propre commun.

2) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

3) On suppose de plus que f et g sont diagonalisables. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales. On dit que f et g sont simultanément diagonalisables.

Éléments de solution

1) Soit λ une valeur propre de f (λ existe car on travaille sur le corps $\mathbb{C}$). Posons $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et montrons que E_λ est stable par g.
Soit $x \in E_\lambda$. Alors $(f - \lambda\mathrm{Id}_E)(g(x)) = f \circ g(x) - \lambda x = g \circ f(x) = x = g\Big((f - \lambda\mathrm{Id}_E)(x)\Big) = g(0) = 0$. Donc $g(x) \in E_\lambda$.
Considérons l'application g_λ de E_λ dans E_λ qui, à $x \in E_\lambda$, associe $g(x)$. C'est un endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel donc il admet une valeur propre μ et il existe $x \neq 0 \in E_\lambda$ tel que $g_\lambda(x) = g(x) = \mu x$. Or $x \in E_\lambda$ donc $f(x) = \lambda x$. On a ainsi montré que f et g ont un vecteur propre commun.

2) On montre le résultat par récurrence sur la dimension de E. Posons $\dim E = n$.
Si $n = 1$, il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures (en fait, n'importe quelle base convient).
Supposons que $\dim E = n \geq 2$ et que le résultat est vrai pour tout sous-espace de dimension $n-1$.
Soit e_1 un vecteur propre commun à f et g. En utilisant le théorème de la base incompléte, on construit une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. On définit alors deux matrices F et G par

$$F = \mathrm{mat}(f, \mathscr{B} = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad G = \mathrm{mat}(g, \mathscr{B} = \begin{pmatrix} \mu & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où L et M sont des matrices de $\mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ et A et B des matrices de $\mathscr{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$. Comme f et g commutent, on a également $FG = GF$, i.e.

$$\begin{pmatrix} \lambda v & \lambda M + AB \\ 0 & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \mu L + MA \\ 0 & BA \end{pmatrix}$$

On en déduit que $AB = BA$. D'après l'hyptohèse de récurrence, il existe une matrce carrée Q d'ordre $n-1$ inversible telle que $A = QTQ^{-1}$ et $B = QUT^{-1}$ avec T et U des matrices triangulaires supérieures. Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \text{ alors } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \text{ et}$$
$$P^{-1}FP = \begin{pmatrix} \lambda & LQ \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad P^{-1}GP = \begin{pmatrix} \mu & MQ \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

On a donc montré que f et g sont triangularisables dans une même base.

3) Soient $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de f et $E_f(\lambda_i)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i pour $i \in \{1, \dots, p\}$.
Comme f et g commutent, $E_f(\lambda_i)$ est stable par g. De plus $E = \oplus_{i=1}^p E_f(\lambda_i)$ car f est diagonalisable.
Soit g_i l'endomorphisme de $E_f(\lambda_i)$ défini par $g_i(x) = g(x)$ pour tout $x \in E_f(\lambda_i)$. g étant diagonalisable sur E, g_i est diagonalisable sur $E_f(\lambda_i)$. Il existe donc une base $\mathscr{B}_i$ de $E_f(\lambda_i)$ formée de vecteurs propres de g_i donc de f et de g. La réunion des bases $\mathscr{B}_i$ est alors une base de E formée de vecteurs propres communs à f et à g