UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est irréductible. On veut montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est la matrice compagnon du polynôme caractéristique.

1) Soit $u \in E$ avec $u \neq 0$. On pose $V = \text{Vect}\{u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\}$. Montrer que V est stable par f.

2) On considère W un supplémentaire de V dans E. Montrer que $W = \{0\}$. Conclure.

Éléments de solution

1) Soit $P_f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ le polynôme caractéristique de f. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_f(f) = 0$ donc $f^n = -a_1 f^{n-1} - \cdots - a_n\, Id$. On en déduit que $f^n(u) = a_1 f^{n-1}(u) - \cdots - a_n\, u$. L'image par f d'un vecteur générateur de V est donc dans V, c'est-à-dire que V est stable par f.

2) Soit W un supplémentaire de V dans E. Si $W \neq \{0\}$, alors la matrice de f dans une base adaptée à la somme $E = V \oplus W$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

car V est stable par f.

Le polynôme caractéristique de f est alors égal à $\text{Dét}(X\,Id_p - A)\,\text{Dét}(X\,Id_{n-p} - C)$ et n'est donc pas irréductible. Absurde donc $W = \{0\}$ et $V = E$. Le système générateur de V ayant n éléments est une base de E. Dans cette base, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

C'est donc la matrice compagnon de $P_f(X)$.