UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient générique a_{ij} défini par :

$$a_{ij} = 2 \quad \text{si} \quad i = j, \quad a_{ij} = -1 \quad \text{si} \quad |i-j| = 1, \quad a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i-j| > 1.$$

Éléments de solution

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc diagonalisable.

On cherche les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{R}$ de A car on a $A = P^{-1}\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P$ où P est la matrice de changement de base constituée des vecteurs propres correspondant de A.

Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ le vecteur propre associé à λ, le système $Ax = \lambda x$ s'écrit

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \lambda x_1 \\ -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} = \lambda_j x_j, \quad j = 2, n-1 \\ -x_{n-1} + 2x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

En posant (1) $x_0 = x_{n+1} = 0$, on peut l'écrire

$$(2) \qquad -x_{j+1} + (2-\lambda)x_j - x_{j-1} = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, n.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence linéaire d'ordre deux est

$$(3) \qquad r^2 - (2-\lambda)r + 1 = 0$$

Le discriminant $\Delta = \lambda(\lambda - 4)$ s'annule pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 4$ qui ne sont pas valeurs propres de A.

En effet, si $\lambda = 0$, (2) donne $x_j = jx_1$ pour $j = 2, n+1$, donc $x = 0$ si $x_n + 1 = 0$.

Si $\lambda = 4$, (2) donne $x_j = -jx_1$ si j est pair et $x_j = jx_1$ si j est impair. donc $x_{n+1} = 0$ entraine $x = 0$.

Si λ est valeur propre de A, (3) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tel que les composantes du vecteur propre x s'écrivent : $x_j = ar_1^j + br_2^j$. Déterminons r_1 et r_2 en utilisant (1) puis calculons λ. De $x_0 = 0$ on déduit que $b = -a$ et avec $x_{n+1} = 0$ que $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$. D'après (3) $r_1 r_2 = 1$ donc $r_1^{2n+2} = 1 = r_2^{2n+2}$: r_1 et r_2 sont les racines conjuguées $n+2$-ièmes de l'unité. On choisit $r_1 = e^{\frac{ik\pi}{n+1}}$ et $r_2 = e^{\frac{-ik\pi}{n+1}}$ pour $k = 0, \ldots, n$. Nous excluons la possibilité $k = 0$ car alors $r_1 = r_2 = 1$ et $x = 0$.

D'après (3), on a $r_1 + r_2 = 2 - \lambda$ donc les valeurs propres de A sont

$$\lambda_k = 2\,(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}) \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n.$$

Le vecteur propre associé à λ_k a pour composantes $x_j = \sin\frac{kj\pi}{n+1}$, $j = 1, \ldots, n$ (on choisit $a = \frac{1}{2i}$ pour avoir $x_j \in \mathbb{R}$).