UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant de la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

Éléments de solution

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ et f l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base $\mathscr{B}$.
On a alors $f(e_1) = e_n$ et $f(e_i) = e_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq n$. Donc $f^n = Id$, ce qui se traduit matriciellement par $A^n = I_n$.
Le polynôme P défini par $P(X) = X^n - 1$ est donc un polynôme annulateur de A ; or il est de degré n, c'est donc, au signe près, le polynôme caractéristique de A.
P étant scindé et à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable : il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P^{-1}DP \text{ avec } D = \text{diag}(1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}).$$

Posons $Q(X) = a_1 + a_2X + \cdots a_nX^{n-1}$, alors $M = Q(A)$. D'où

$$M = P^{-1}Q(D)P.$$

On en déduit que

$$\text{Dét}(M) = \text{Dét}\big(Q(D)\big) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(e^{\frac{2ik\pi}{n}}).$$