Exercice

Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ de degré n, de racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non supposées distinctes). On suppose que $P(X)$ est à coefficients entiers.
Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_q(X) = (X - \lambda_1^q) \times \ldots \times (X - \lambda_n^q).$$

Montrer que $P_q(X)$ est lui aussi à coefficients entiers.

Éléments de solution

Posons $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.
Soit A la matrice compagnon de P :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique Dét$(XId - A)$ de cette matrice est le polynôme P.
La matrice A est triangularisable sur $\mathbb{C}$. Il existe une matrice Q de $GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors pour tout $q \leq 1$ entier

$$Q^{-1}A^qQ = \begin{pmatrix} \lambda_1^q & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2^q & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^q \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A^p est donc le polynôme $P_q(X)$. Or la matrice A^q est, comme A, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donc le polynôme $P_q(X)$ est à coefficients entiers.