exologo Soient A, B, C et D des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.
Montrer que

$$\text{Dét}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Dét}(AD - BC).$$

Éléments de solution

Supposons que la matrice D soit inversible. On peut alors écrire

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ CD - DC & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer les déterminants des matrices triangulaires par blocs et on obtient le résultat souhaité.
Supposons maintenant que D n'est pas inversible. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la matrice $D - \lambda I_n$ soit inversible. On a alors

$$\text{Dét}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D - \lambda I_n \end{pmatrix} = \text{Dét}\big(A(D - \lambda I_n) - BC\big).$$

Les deux termes de l'égalité sont des polynômes en λ et cette égalité est vraie pour tout λ qui n'est pas valeur propre de D, donc pour tout λ sauf un nombre fini de valeurs. On en déduit que ces deux polynômes sont égaux sur $\mathbb{C}$ et donc en particulier en 0.