UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un corps $\mathbb{K}$.
On définit un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$P(X) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer le polynôme caractéristique de M.

Éléments de solution

Notons P_M le polynôme caractéristique de la matrice M. Par définition

$$P_M(X) = \text{Dét}(M - XI_n) = \begin{vmatrix} -X & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix}$$

Ajoutons à la première ligne la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n-1} X^k L_k$, où L_k représente la $k$ème ligne. On obtient alors

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & P(X) \\ 1 & -X & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix} = (-1)^n P(X)$$

en développant par rapport à la première ligne.
Au signe près, le polynôme caractéristique de la matrice M est égal au polynôme P.

La matrice M s'appelle la matrice-compagnon du polynôme P.